

觀念物理一題目

「螺旋甩球」認識「角動量」

「角動量」在力學中，屬於較抽象且複雜的概念，學生往往難以掌握此術語的意義，以及「角動量守恆」的適用條件。「螺旋甩球」與「旋轉盤」常常被教科書中引用於「角動量」的單元，本單元則將情境再做修編與延伸，以挑戰大家對於「角動量」及相關概念的理解。

小試身手

1. 一繩兩側分別連接一球，穿過一個小圓杯，並將其中一球沿水平面甩起（如圖 1）。甩球的過程，施力將下方之繩子逐漸拉下，使上方球以螺旋軌跡向內縮小（如圖 2 所示）。當旋轉半徑縮為原來之 $1/2$ 時，繩子張力應變為原來幾倍？
(A) $1/2$ 倍 (B) 1 倍 (C) 2 倍 (D) 4 倍 (E) 8 倍

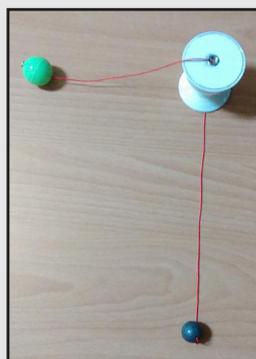


圖 1：螺旋甩球教具

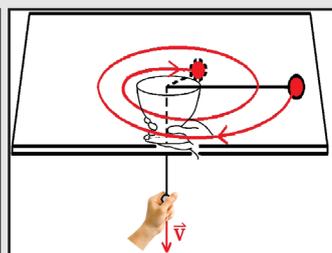


圖 2：下拉螺旋甩球

2. 承上題，過程中球對中心轉軸的角速率變為原來幾倍？
(A) 1 倍 (B) $\sqrt{2}$ 倍 (C) 2 倍 (D) $\sqrt{8}$ 倍 (E) 4 倍
3. 承上題，過程中角動量變為原來幾倍？
(A) $1/2$ 倍 (B) 1 倍 (C) 2 倍 (D) 4 倍 (E) 8 倍

4. 現甩動中央小圓杯，當球維持穩定旋轉時，先放開握住下方球的手，進而將上方球逐漸甩出（如圖 3），則旋轉半徑逐漸增大的過程（下方球以等速上升），上方球的速率應如何？
(A) 漸增 (B) 漸減 (C) 維持不變

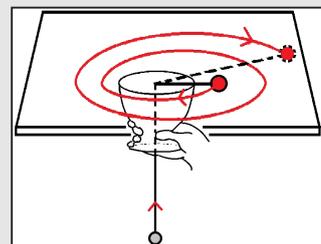


圖 3：擴張螺旋甩球

5. 承上題，旋轉半徑增大的過程中，上方球的角動量將會如何？
(A) 漸增 (B) 漸減 (C) 維持不變

6. 承上題，當旋轉半徑變為原來 2 倍時，上方球的角速率應為原來之幾倍？
(A) $1/4$ 倍 (B) $1/\sqrt{8}$ 倍 (C) $1/2$ 倍 (D) $1/\sqrt{2}$ 倍

7. 如圖 4 所示，一人兩手分別握著啞鈴在無摩擦之轉台上等速旋轉，若此人將手上的啞鈴放掉，直到落地之前的過程，[人 + 啞鈴] 系統的角動量是否守恆？
(A) 守恆 (B) 不守恆

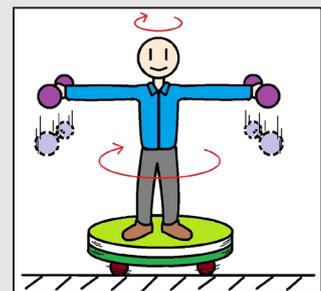


圖 4：旋轉者放開啞鈴

8. 承上題，放掉啞鈴後此人旋轉之角速率將會如何？
(A) 增加 (B) 減小 (C) 不變

9. 承上題，啞鈴被放掉後到落地前的過程，其運動軌跡為何？
(A) 固定半徑的螺旋落下 (B) 半徑漸增的螺旋落下
(C) 半徑漸減的螺旋落下 (D) 拋物線落下 (E) 直線落下

10. 承上題，啞鈴在落下過程，其對中心轉軸的角動量將會如何？
(A) 逐漸增加 (B) 逐漸減小 (C) 保持定值且不為零 (D) 維持為零

觀念物理－解答

「螺旋甩球」認識「角動量」

詳解與困難剖析

本單元包含下列三種情況：下拉螺旋甩球 (如圖 1) (第 1~3 題)、擴張螺旋甩球 (如圖 2) (第 4~6 題)、及旋轉者放開啞鈴 (如圖 3) (第 7~10 題)。每題的正確答案、常見錯誤選項、及試題難度，列於表 1 並說明如下：

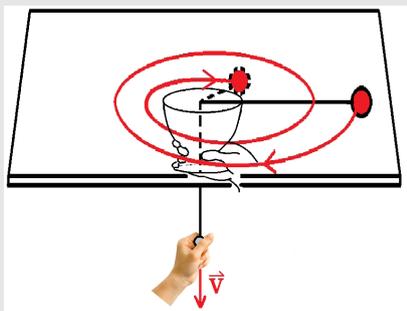


圖 1：下拉螺旋甩球

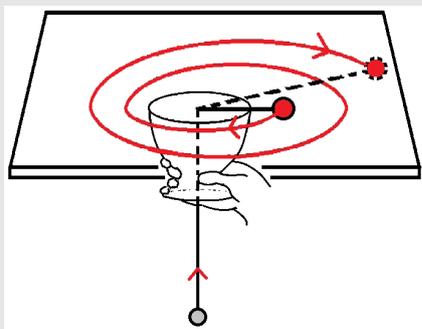


圖 2：擴張螺旋甩球

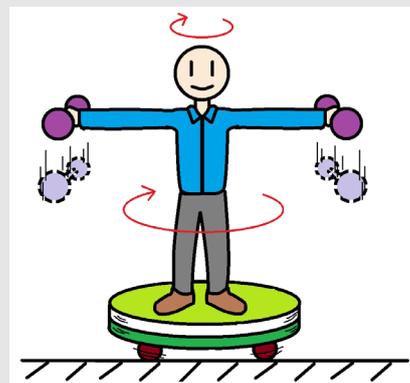


圖 3：旋轉者放開啞鈴

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正確答案	E	E	B	A	A	D	A	C	D	C
常見誤答	D	C	無	B	C	A	B	A	其它	D
難度	中	中	易	難	難	難	中	難	難	難

第 1 ~ 3 題

正確觀念：

如圖 1 所示，當外力下拉，使上方球旋轉內縮的過程，球所受的外力 $\neq 0$ ，但外力（繩子張力）對轉軸沒有力臂，所以力矩 $= 0$ 。根據 $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ ，當無外力力矩（ $\vec{\tau} = 0$ ）時，則 $\Delta\vec{L} = 0$ ，所以角動量守恆（ $\vec{L} = \text{常數}$ ）（第 3 題）。

由「角動量守恆」可推出角速率（ ω ）的變化，根據角動量的定義： $L = I\omega = (mr^2)\omega$ （將小球視為質點）， $\because L$ 固定 $\therefore \omega \propto 1/r^2$ ，半徑減為 $1/2$ ，則角速率（ ω ）變為 4 倍（第 2 題）。至於繩子張力（ T ）則提供球旋轉所需的向心力（ F_c ），根據

$T = F_c = mv^2/r = m(r\omega)^2/r = mr\omega^2$ ，故 T 與 $r\omega^2$ 成正比，張力變成 $(1/2)(4)^2 = 8$ 倍（第 1 題）。

常見錯誤：

針對螺旋甩球內縮（圖 1）這個熟悉的情境，多數同學能夠正確聯想到「角動量守恆」（第 3 題）。但在推理「角速率」時，有人會與「速率」相混淆，根據角動量的另一種定義 $L = mrv = \text{常數}$ ，推得速率（ v ）與半徑（ r ）成反比，誤選了「角速率」為 2 倍（第 2 題）。而推導張力（ T ）時，雖然能聯想到向心力（ $T = F_c = mv^2/r$ ），但推算比例時僅考慮到速率（ v ）的變化而忽略了半徑（ r ）也減半，而誤選了 4 倍（第 1 題）。

第 4 ~ 6 題

正確觀念：

同一個教具，但將軌跡改為「螺旋外甩」（如圖 2）的過程，則維持定值的是繩子的張力（等於下方球的重量）。根據 $F_c = mv^2/r = \text{定值}$ ，半徑（ r ）漸增，速率（ v ）也會漸增（第 4 題）。

此時，角動量（ $L = mrv$ ）則因半徑（ r ）與速率（ v ）都增大，導致角動量漸增（第 5 題）。而角速率（ ω ）的變化，則可由 $F_c = mv^2/r = \text{定值}$ ，推得 $v \propto \sqrt{r}$ ，當 $r \rightarrow 2$ 倍， $v \rightarrow \sqrt{2}$ 倍，所以 $\omega = v/r \Rightarrow \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$ 倍（第 6 題）。

至於角動量增加的原因，根據 $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ 推論，上方球必受到外力之力矩作用。而此力矩來自手持的中央小圓杯，在將球往外甩的過程中，會與繩子產生摩擦力（如圖 4 所示），因與球的速度同向，所以可使球加速，而此摩擦力之力矩，則可增加上方球的角動量。

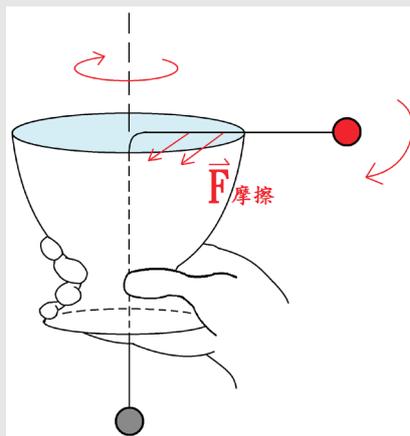


圖 4：摩擦力使球加速

常見錯誤：

多數的學生仍然選擇「角動量守恆」（第 5 題），再透過 $L = mrv = \text{常數}$ ，誤推出半徑增大則速率會減慢（第 4 題），同時根據 $L = I\omega = mr^2\omega$ ，推得角速率（ ω ）會變成 $1/4$ 倍（第 6 題）。

選擇「角動量守恆」的人，可能是受到相似情境（如圖 1）的誤導，未經推理直接套招。但也有可能正確引用了 $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ 來分析，卻因找不到外力力矩而造成錯誤。

第 7 ~ 10 題

正確觀念：

當旋轉中的人放掉啞鈴時 (如圖 3)，此人因不受外力影響，而維持原來的角速度旋轉 ($\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, $\vec{\tau} = 0$ 則 $\vec{\alpha} = 0 \therefore \vec{\omega} = \text{常數}$) (第 8 題)。至於啞鈴，一旦離手落下，則因已失去旋轉所需的向心力 (由手提供)，所以不再旋轉，而是會以原有的切線速度方向，做水平拋射，呈拋物線軌跡落到地面 (第 9 題) (如圖 5 所示，拋物線軌跡在 $x-z$ 平面上)。

雖然啞鈴落下的軌跡呈拋物線，而不再旋轉，但在落地前的運動狀態，在水平方向 (如圖 5 與圖 6 之 x 方向) 仍維持等速度運動，所以對轉軸 (z 軸) 之角動量 $L_z = mr_y v_x$ ，因其中之 r_y, v_x 均維持不變，所以啞鈴的角動量守恆 (第 10 題)。換句話說，即使物體不旋轉，而是保持等速度運動，則角動量仍然不為零，且保持定值。

至於 [人 + 啞鈴] 之角動量也會守恆 (第 7 題)，因人的轉速不變，根據 $L = I\omega$ 人的角動量保持不變，而啞鈴落下過程角動量也保持不變，所以總合不變。以上是透過「結果」(角速度) 來判斷「角動量」的守恆，我們也可透過「原因」，根據 $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ ，得知角動量改變的原因為「外力矩」。當雙手放開啞鈴之後，啞鈴雖然會受到重力 (外力) 的作用，但兩個啞鈴的重力對轉軸所形成的力矩，方向恰好相反，合力矩抵銷 ($\vec{\tau} = 0$)，所以 [人 + 啞鈴] 之角動量守恆。

常見錯誤：

第 8 題多數學生會選擇放開啞鈴後，人的轉速會增加，普遍的想法為“放掉啞鈴，因轉動慣量減小，且角動量守恆，所以轉速增加”，忽略了啞鈴在落下過程中，仍具有角動量，同時，旋轉的人也沒有加速的「來源」(外力力矩)，透露出推理的瑕疵。

上述推理可能是將本題組與相似的情境 (如圖 7) 做了不當的聯想。圖 3 與圖 7 都是在自轉，也都符合角動量守恆，但圖 7 是因雙手收起啞鈴而減小轉動慣量，故角速度增加，與本題組不同。

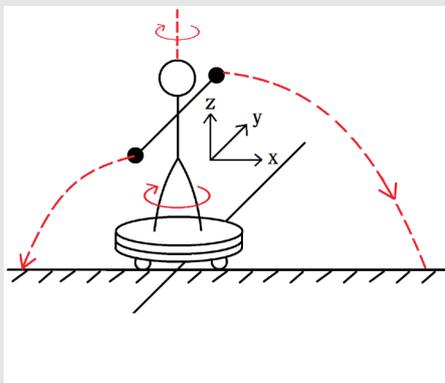


圖 5：啞鈴呈拋物線落下

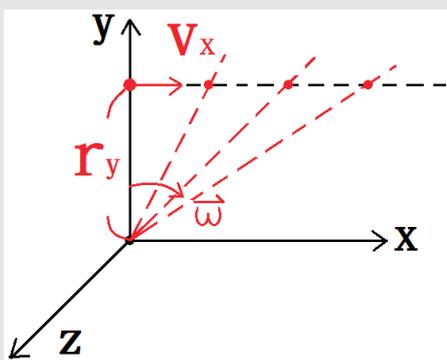


圖 6：直線運動具有角速度

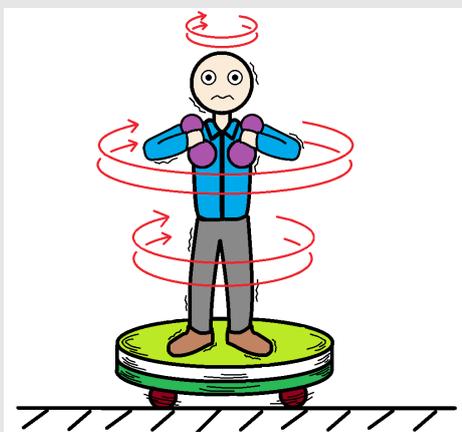


圖 7：啞鈴往內收手

另針對啞鈴落下的過程(第9、10題),常見的錯誤,包含:(1)誤以為啞鈴離手後仍會繼續轉動(螺旋落下),顯示出他們對「慣性」運動的迷思,物體不受力時會保持直線等速運動,而不會維持圓周運動。(2)誤以為直線運動(不旋轉)的物體,就沒有角動量。但根據角動量的定義 $L = I\omega = m\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{v}$,等速度的物體,只要其速度(\mathbf{v})與位置向量(\mathbf{r})不平行,則 $\mathbf{r}_{\perp} \neq 0 \Rightarrow L \neq 0$ (角動量不為零)。同時,也可從圖6看出,在物體等速直線運動的過程,物體與參考軸的夾角的確會改變,因此角速度 $\omega \neq 0$,角動量 $L \neq 0$ 。所以,維持等速度(不旋轉)的物體,也能符合「角動量守恆」。

不當推理及有效策略

「角動量」這個日常生活不會使用的「術語」,之所以被物理學界「發明」,就是因為可以利用其「守恆」的特性而幫助推理。但要有效地推理,須能夠釐清「角動量」守恆的條件(why & when)及結果(how)。

根據 $\vec{\tau} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ 得知角動量守恆的條件為「外力矩=0」,其情況可能是:1)有受外力但沒有力臂(如圖1)、2)沒有受到外力(如圖3的旋轉者)、3)有受外力力矩,但合力矩抵銷(如圖3的啞鈴)。三種情境都符合外力矩=0的條件,但現象卻大不相同,而難度則往往與試題的熟悉度有關,越熟悉的情境(如圖1)則越容易答對。

至於角動量守恆的結果,也可能具有各種不同的面貌,而其難度也隨熟悉度而異。根據角動量之定義 $L = I\omega = m\mathbf{r}_{\perp} \mathbf{v}$,「角動量守恆」的結果包含:(1)角速度(ω)隨轉動慣量(I)之增減而成反比(第2題),此一現象學生最熟悉,難度最低、(2)角速度與轉動慣量皆維持不變(第8題)、(3)圓周運動變成直線運動(第10題)。後兩種現象難度相當高,可能是因缺乏相關情境的練習。同時,因角動量涉及雙重定義,分別可由 ω 或 \mathbf{v} 定義,前者是轉動而後者是線性運動。不同的觀點定義同一個物理量,學生需要能靈活地切換視野(轉動或平移),因而加深了概念推理的難度。

本單元再度發現,學生會胡亂套用不適當的原理於相似情境中,例如:將「螺旋外甩」(圖2)與「螺旋內縮」(圖1)相混淆,顯示出他們缺乏判斷「角動量守恆」適用條件的能力。另外,對於守恆的結果,也透露出相似情境的不當混用,如:將「放掉啞鈴」(圖3),聯想到「啞鈴內收」(圖7),以為兩者角動量守恆的結果,皆會越轉越快。

綜合以上,要促進學生對於守恆定律的理解,包含守恆的條件與結果,需提供許多不同的情境(包含相似情境的改編)讓學生練習,以鼓勵學生確實進行概念推理,進而逐漸體會定律的內涵及用途,同時杜絕背誦與套招的不當答題習慣。

註1:第4~6題由彰師物理系105級師培公費生梁惕華提供想法

註2:第8題參考Hewitt, P. (2009). Angular momentum conservation with a twist. *The Physics Teacher*, 47(1), 6-6.