

# 觀念物理－試題

## 從平移到轉動

運動可分為「平移」與「轉動」兩種，而現行課程多半將兩種「力學」分別討論，很少有機會做兩者間的比較與整合。本單元提供兩個看似相似的情境，透過以下問題，讓我們釐清「力學原理」在**平移**與**轉動**現象中，彼此間的關聯，包含：「 $\bar{F} = m\bar{a}$  與  $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$ 」、「動量 vs. 角動量」、「平移動能 vs. 轉動動能」…等。

### 小試身手

(I) 第 1~5 題，請根據以下條件作答：

相同的外力 ( $F$ )，在無摩擦的光滑平面上，分別作用在一長條木板的 (1) 中央，及 (2) 邊緣上 (如圖 1 所示)，並使其質心推動相同距離 ( $S$ ) 後，外力才消失。則

- 施力於邊緣上時，木板是否必然會**旋轉**？  
(A) 是 (B) 否
- 施力過程中，兩長條木板的**質心加速度** ( $a$ )，何者較大？  
(A)  $a_1 > a_2$  (B)  $a_1 < a_2$  (C)  $a_1 = a_2$
- 施力過程後，兩長條木板所獲得的**平移動能** ( $E_k$ )，何者較多？  
(A)  $E_{k1} > E_{k2}$  (B)  $E_{k1} < E_{k2}$  (C)  $E_{k1} = E_{k2}$
- 施力過程中，外力對兩木板的**作功** ( $W$ )，何者較多？  
(A)  $W_1 > W_2$  (B)  $W_1 < W_2$  (C)  $W_1 = W_2$
- 兩種施力過程所耗費的**時間** ( $t$ )，關係如何？  
(A)  $t_1 > t_2$  (B)  $t_1 < t_2$  (C)  $t_1 = t_2$

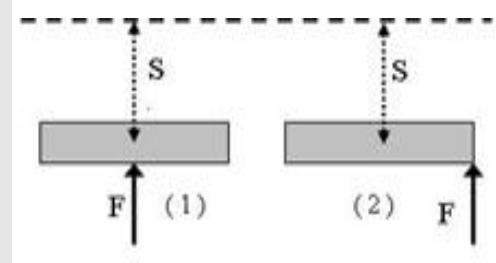


圖 1：相同外力推動

(II) 第 6~9 題，請根據以下條件作答：

相同質量與速度之子彈，分別往上瞄準懸浮木板的 (1) 中心，及 (2) 邊緣，並卡入木板帶動木板向上升 (如圖 2 所示)。若兩個木板的所有條件相同，且假設子彈卡入木板的力遠大於兩者之重力，則

- 兩木板質心的上升**高度** ( $h$ )，何者較高，或兩者相等？  
(A)  $h_1 > h_2$  (B)  $h_1 < h_2$  (C)  $h_1 = h_2$
- [木板 + 子彈] 之系統，在子彈卡入後，何者的**總動能** ( $E_k$ ) 較大，或兩者相等？  
(A)  $E_{k1} > E_{k2}$  (B)  $E_{k1} < E_{k2}$  (C)  $E_{k1} = E_{k2}$
- [木板 + 子彈] 之系統，在子彈卡入後，何者的**動量** ( $p$ ) 較大，或兩者相等？  
(A)  $p_1 > p_2$  (B)  $p_1 < p_2$  (C)  $p_1 = p_2$
- 子彈卡入兩木板的**距離** ( $S$ )，何者較長，或兩者相等？  
(A)  $S_1 > S_2$  (B)  $S_1 < S_2$  (C)  $S_1 = S_2$

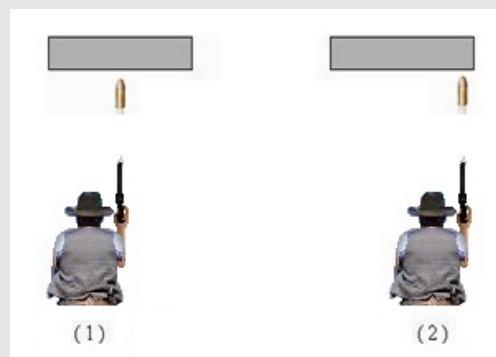


圖 2：相同子彈卡入懸浮木板

# 觀念物理－解答

## 從平移到轉動

### 詳解與困難剖析

本單元包含兩種情境，第 1~5 題如圖 1 所示，第 6~9 題如圖 2 所示。每題的正確答案、常見錯誤選項、及試題難度，列於表 1 並說明如下：

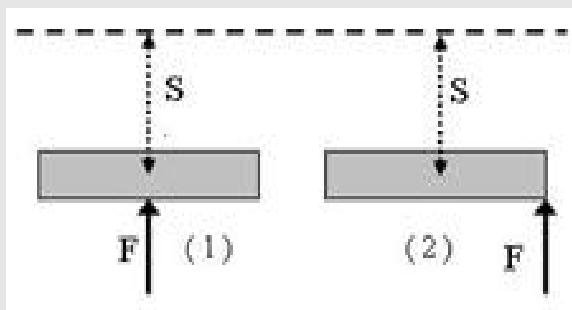


圖 1：相同外力推動

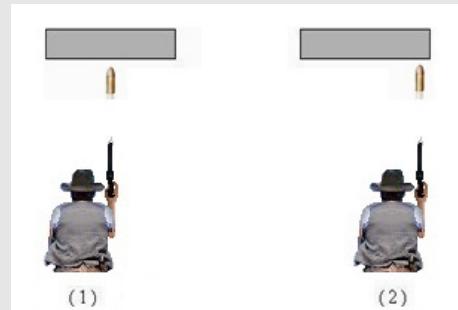


圖 2：相同子彈卡入懸浮木板

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
正確答案	A	C	C	B	C	C	B	C	A
常見誤答	B	A	A	C	B	A	C	A	C
難度	中	難	難	難	難	難	難	中	易

### 第 1 題

**正確觀念：**如圖 1-(2) 所示，要判斷木板不受摩擦，但其邊緣持續受外力，是否會旋轉？本題原本的用意只是要引出施力後的**轉動**現象，沒想到難度超乎預期。若以質心為「參考軸」，則外力 (F) 的施力點到質心有力臂，因而形成力矩 (逆時針)，所以會旋轉。

運用  $\tau = I\bar{a}$  公式時所引用的「參考軸」是有限制的，包含：1) 通過質心、2) 無加速度的點 ( $\bar{a} = 0$ )、3)  $\bar{a} \neq 0$ ，但加速度向著質心的點。因此，若將參考軸移到 F 的施力點，則此點因  $\bar{a} \neq 0$  且方向不通過質心 ( $\bar{a} \uparrow$ )，所以不能用 F 的施力點，套用  $\tau = I\bar{a}$  來分析木板是否旋轉。

**常見錯誤：**相當高比例的學生選擇「不會旋轉」，而他們的理由包含：(1) 因沒有摩擦，水平僅受  $F$ ，所以無力矩、(2) 光滑平面找不到支點，因此不會轉動；(3) 以為「無摩擦」代表支點必須在  $F$  上方，所以不會旋轉。

上述理由可歸納出兩項誤解：(1) 學生在理解「一對力偶」可使物體旋轉的同時，可能會誤以為「單一外力」並不會旋轉、(2) 誤將  $\tau = I\bar{\alpha}$  的轉軸定在施力點，則因為沒有力臂而不會旋轉（根據  $\tau = I\bar{\alpha}$ ，其中  $\tau = 0$ ，但  $I \neq 0 \therefore \bar{\alpha} = 0$ ）。邏輯雖然正確，卻違反了  $\tau = I\bar{\alpha}$  對轉軸的限制，而這項限制也常常被教科書忽略，導致學生的困擾。

## 第 2、3 題

**正確觀念：**欲比較圖 1-(1) 及圖 1-(2) 的質心加速度 ( $\bar{a}_{cm}$ )，需理解  $\sum \bar{F} = m\bar{a}$  的公式也可以套用在轉動的剛體，但須修正為  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$ 。無論外力是否產生力矩（與所有外力的作用點無關），只要求出外力之向量和，就可推論出質心的加速度（透過  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$ ），所以圖 1-(2) 雖然會有轉動的效果，但因兩者之外力相等，所質心加速度 ( $\bar{a}_{cm}$ ) 相等（第 2 題）。

接著可以透過  $\bar{a}_{cm}$  相等，推導出在加速相同距離 ( $S$ ) 後，兩者質心末速也相等，所以兩者之平移動能會相等  $a_{cm} \Rightarrow$  末速  $v_f \Rightarrow E_k$ （第 3 題）。這兩題的作答相關性相當高，只要  $\bar{a}_{cm}$ （第 2 題）判斷正確，「平移動能」（ $E_k$ ，第 3 題）就沒有問題。

**常見錯誤：**以為有轉動效果時 [ 圖 1-(2) ]，質心的加速度會變小。有學生解釋說“因為轉動，多了角加速度，所以加速度會比較小”，也有人解釋：“ $F_1 = ma_1$ ,  $F_2 = ma_2 + I\alpha$ ， $\therefore a_1 > a_2$ ”（第 2 題），透露出他們在分析加速度時，抱持著[ 平移 + 轉動 ] 守恆的誤解，進而也造成「平移動能」（第 3 題）錯誤。

另外，若學生在第 1 題就誤以為圖 1-(2) 不會旋轉，則可能第 2, 3 題皆能答對，但實際上他們可能並未掌握「加速度與旋轉與否無關」的這項概念。換句話說，若題目明講圖 1-(2) 會旋轉，則可能會有更多的學生誤認為  $a_1 > a_2$ 。

## 第 4 題

**正確觀念：**要比較外力「作功」的大小，可以透過兩條不同的途徑：1) 透過作功的定義 ( $Work = \bar{F} \cdot \bar{d}$ )，其中的位移 ( $\bar{d}$ ) 是施力位移（而不是質心位移），圖 1-(2) 因為有旋轉，施力位移會比圖 1-(1) 長，所以作功較大；2) 也可透過「功能原理」( $Work = E_{K\text{平移+轉動}}$ )，因兩圖具有相同的平移動能（第 3 題），但圖 1-(2) 還多出轉動動能，所以總動能較大，反推出外力作功較多。這兩條推導的途徑，前者根據作功的原因，後者根據結果來推，無論因果結論都相同。

**常見錯誤：**雖然大多數學生可以掌握上述兩條推導途徑，但在引用  $Work = \bar{F} \cdot \bar{d}$  時，卻誤以為其中的位移 ( $\bar{d}$ ) 是質心位移（而不是施力位移），所以誤推了兩者作功相等。另外，也有學生根據「功能原理」作答，但誤以為總動能相等，而導致「作功」的推論也一起錯。兩者都會誤選  $W_1 = W_2$ 。

## 第 5 題

**正確觀念：**判斷施力的時間，需引用牛頓定律 ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ ) 與運動學  $S = (1/2)at^2$ ，透過外力相等，所以質心加速度 ( $a_{cm}$ ) 相等，且質心位移 ( $S$ ) 相等，故推得時間 ( $t$ ) 也相等 ( $t_1 = t_2$ )。也可以透過「衝量」、「動量」、與「力」，來推導出作用「時間」 ( $\bar{J} = \vec{F} \cdot t = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_f$ )，因為質心「末速」相等，「動量」相等，所需「衝量」相等，故外力作用「時間」必相等。

**常見錯誤：**雖然多數學生能引用關鍵原理 (公式)，但可能因為：1) 誤以為轉動的「質心加速度」較小 ( $a_1 > a_2$ ) (第 2 題)，所以推出轉動需要較長時間 ( $t_1 > t_2$ )；2) 雖然正確掌握了  $a_1 = a_2$ ，但誤以「施力位移」(而非質心位移)，來判斷「施力時間」，同樣導致  $t_1 < t_2$  的結果；3) 甚至有人認為圖 1-(2) 只會原地旋轉不會前進，所以不可能達到虛線位置 (如圖 3)。這些學生可能將「線性平移」與「轉動」做了切割，例如：“外力 ( $F$ ) 的轉動效果會取代平移的效果”，但實際上剛體受的「外力」，同時具有「力矩」功能，故包含「平移」與「轉動」兩種運動現象 (如圖 4)。

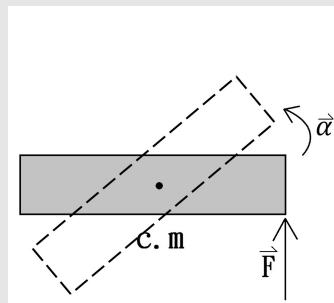


圖 3: 只有轉動效果

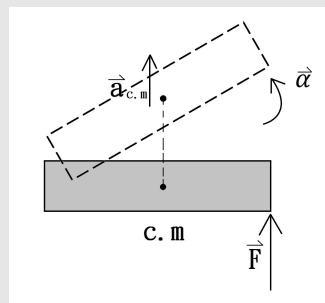


圖 4: 包含平移與轉動

## 第 6~8 題

**正確觀念：**如圖 2 所示，要探討子彈分別射入**懸浮木板**的不同位置後，[ 木板 + 子彈 ] 系統的總動能 (第 7 題)、總動量 (第 8 題)、及可上升的高度 (第 6 題)。因為子彈卡入的過程，只受到子彈與木板間互相卡住的作用力，對 [ 木板 + 子彈 ] 系統而言是內力 (此過程忽略重力)，所以「動量守恆」。因此，系統總動量在卡入前、後會相等，因為圖 2-(1) 與圖 2-(2) 的「初動量」相等 (皆等於子彈的  $mv$ )，所以兩圖的「末動量」也相等 ( $\sum \vec{p}_1 = \sum \vec{p}_2 = \vec{p}_{子彈} + \vec{p}_{木板}$ ) (第 8 題)。接著透過「動量相等」 ( $\vec{p}_{子彈} + \vec{p}_{木板} \big|_{1=2} = (m_{子彈} + 木板 \cdot \vec{v}) \big|_{1=2}$ )，推得子彈卡入後的系統「末速」相等，所以木板上升高度也相等 ( $h_1 = h_2$ ) (第 6 題)。

至於「總動能」則因兩者質心的「末速相等」，平移動能相等，但圖 2-(2) 還有旋轉運動，總動能 = (平移動能) + (轉動動能)，會比純粹平移的動能大 ( $E_{k1} < E_{k2}$ )。兩者動能不相等的原因是，子彈卡入的力算是「動摩擦」，卡入的過程摩擦力所作的功會消耗子彈動能。且因子彈卡在不同位置時，在卡入過程所消耗的動能會有所不同，因此兩者的末動能不會一致。

**常見錯誤：**這三題比較，「動量相等」(第8題)的答對率最高，且多數學生能依據系統「僅有內力」，或「非彈性碰撞」正確推論。但許多學生卻同時誤用「力學能守恆」，來推出「動能相等」(第7題)，同時根據圖2-(2)涉及轉動動能，而使系統上升高度較低(第6題)。

第6~8題的概念盲點(誤解)，包含：1)摩擦力是「非保守力」，會“消耗”系統的「能量」，也會消耗「動量」(兩者皆不守恆)、2)摩擦力是「內力」，不會“消耗”系統的「動量」，也不會消耗「能量」(兩者皆守恆)、3)前兩點的盲點都透露出學生無法分辨「動量」與「能量」的區別，包含術語的意義及守恆條件、4)誤以為[總動量 = 動量 + 角動量]、5)直接引用「動能相等」或「末速相等」，但無法提出其原理依據、6)誤以為同一個「力」，不能重複「力」與「力矩」的雙重效果，以為系統若會「旋轉」，就不會「平移」。

## 第9題

**正確觀念：**要比較兩圖中子彈卡入木板距離的大小，需透過「能量」比較，因子彈的「初動能」相等，且系統「末動能」為  $E_{k1} < E_{k2}$  (第7題)，所以圖2-(2)在子彈卡入過程所消耗的動能較少( $\Delta E_{k1} < \Delta E_{k2}$ )，而「消耗的動能 = 摩擦力作功 = 摩擦力  $\times$  卡入距離」，推得「卡入距離」  $S_1 > S_2$ 。理論上本題應該比「動能」的判斷更難，但結果卻不然。

因為本題也可以透過生活經驗直接判斷：子彈打在邊緣時，因木板會旋轉，所以較“不易”卡入。因此，不需透過任何物理概念與推理，也能順利答對。

**常見錯誤：**有人誤以為兩圖「動能相等」(第7題)，而推得卡入的「距離相等」( $\because E_{k1} = E_{k2}$ ，且  $\Delta E_{k1} = \text{Work} = \bar{F} \cdot \bar{S} \therefore S_1 = S_2$ )，推理邏輯與原理(功能原理)皆正確，可惜所依據的前提(動能相等)是錯誤的。

# 不當推理及有效策略

綜合以上，當同時涉及「轉動」與「平移」力學時，學生常忽略以下幾點關鍵的概念或解題策略：

首先，掌握原理的使用限制，例如：1)  $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$  對於「轉軸」是有限制的，如圖 1-(2) 的施力點，就不能當作參考軸(如第 1 題)；2)「功能原理」(第 3, 4 題)與「動量守恆」(第 6~8 題)的限制條件完全不同，後者不能有「外力」涉入，前者須能掌握「外力作功」。

其次，探討原理所涉及的觀點，常須隨著知識的累積，反覆回頭做比較。例如：針對質點學過  $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ ，到了剛體認識  $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$  之後，還需回頭了解  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$  對剛體如何使用？探討「力矩」( $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$ )時，需思考施力點的影響，但  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$  則與施力點無關，無論施力點是否在質心  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$  皆可成立，即使數個外力作用點不同，也可以平移求出「合力」( $\sum \bar{F}$ )(第 2 題)。因此  $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{cm}$  與  $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$  所涉及的觀點是不同的。

第三，當運動現象同時包含「平移」與「轉動」時，有些物理量可以加總，如「總動能 = 平移動能 + 轉動動能」；但其他物理量卻是分別定義，兩者意義不同，單位也不同，故不能加總。如「動量」與「角動量」不能加總，前者探討平移，而後者探討轉動(第 8 題)。同理，「加速度」與「角加速度」也不能加總(第 2 題)。

最後，公式符號的理解需更周延，例如： $\sum \bar{F} = m\bar{a}$  的  $\bar{a}$  除了代表「加速度」，還需指明是質心(不是施力點)的加速度；同理  $Work = \bar{F} \cdot \bar{d}$  的  $\bar{d}$  不僅需知道是「位移」，更須確認是施力點(不是質心)的位移。從本單元看來，學生對於這兩個公式並不陌生且能主動引用，但卻無法掌握符號的指認對象。這種「細節」影響了推理的正確性，值得重視。

註 1: 第 2 題參考 Beatty, I.D., Gerace, W.J., Leonard, W.J., & Dufresne, R.J. (2006). Designing effective questions for classroom response system teaching. *American Journal of Physics*, 74(1), 31-39.

註 2: 第 6 題參考 Shakur, A. (2015). Bullet-block science video puzzle. *The Physics Teacher*, 53(1), 15-16.