

「流體力學」～水流競賽

解 析

詳解與困難剖析

針對這個神奇的「水流競賽」(如圖1)，所有試題的正確答案、常見錯誤、及難度，如表1所示：

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
正確答案	A	B	A	C	C	C	C	A
常見誤答	B	D	X	X	A	A	B	C
難度	難	中	易	易	難	難	難	難

表1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

第1題

正確觀念：藉由實驗觀察，發現相同水量的水瓶，透過長的水管，比短管的水瓶較快流光。至於其背後的原理概念，將於後續問題詳細解釋。

常見錯誤：多數學生無法正確判斷長、短管的水流速率大小。有人認為長的管子，對水流造成較顯著的阻力，所以水會較慢流光。

更多的人則直接套用「連續方程」與「伯努力方程」，認為兩水瓶，水位高度及管子截面積皆相等，因此水流速率相等，與管子的長短無關。水位的高低的確會影響水的流速，但是管子的長短也會影響，詳細原因待後續題目進一步的探討。

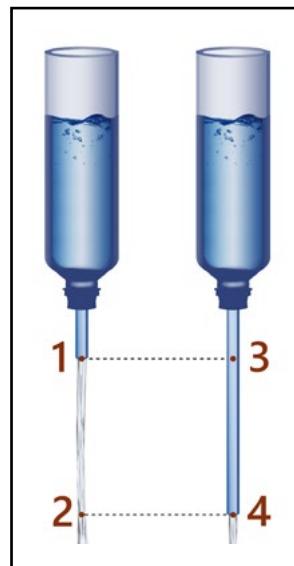


圖1：長短管水流競賽

第2題

正確觀念：首先，根據題幹所給的條件，本單元是探討**水流穩定**時，水柱各點的水壓(P)及流速(v)。所謂「水流穩定」，指的是某一點的水流速固定，不隨時間而改變(**加速度=0**)。因此，為了維持水流穩定，水柱的每一點，所受的**合力為零**($a=0 \Rightarrow$ 「力平衡」 $\sum F = 0 \Rightarrow P_{\text{內}} = P_{\text{外}}$)。故每一點所受的水壓需上、下抵銷。因為點1~點2的水柱範圍，都與外面的大氣保持接觸，為了達到各點的「力平衡」，點1、點2、及之間各點位置的水壓，都等於外面的大氣壓力($P_1 = P_2 = P_{\text{air}}$)。

或許有人質疑，不同高度的水壓，如何達成相等 ($P_1=P_2$)？這需透過「白努力方程」解釋，針對同一道流體的不同位置：

$$P_1 + \rho gh_1 + (1/2) \rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + (1/2) \rho v_2^2 = \text{常數}。$$

「白努力方程」解釋了，影響流體壓力 (P) 的因素，除了流體高度 (h) 之外，還有流速 (v)，流速 (v) 越大，或高度 (h) 越高的地方，流體壓力 (P) 越小。點 2 低於點 1 ($h_1 > h_2$)，但水由點 1 往下流到點 2 時會加速，使得點 2 的流速大於點 1 ($v_2 > v_1$)，高度 (h) 及流速 (v) 兩個影響水壓的變因，相互抵銷，使點 1 及點 2 水壓相等：

$$\therefore P_1 = P_2 = P_{\text{air}}, \therefore \rho g (h_1 - h_2) = (1/2) \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

因此，根據水流穩定，得到 $P_1 = P_2 = P_{\text{air}}$ ，為了達到水壓相等，則根據「白努力方程」，得知下方水柱的流速較上方大 ($\because P_1 = P_2$ 且 $h_1 > h_2$ ， $\therefore v_2 > v_1$) (第 2 題)。

需補充說明一點，既然 $v_2 > v_1$ ，則水流離開管子往下，會越流越細。根據「連續方程」，針對同一道流體的任何一截的質量(及體積)須維持固定，所以流進體積應等於流出體積 ($\Delta V_{\text{進}} = \Delta V_{\text{出}}$)，故流速 (v) 與截面積 (A) 成反比。以點 1 及點 2 為例：

$$\therefore \Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow (A_1 \cdot v_1) \Delta t = (A_2 \cdot v_2) \Delta t \Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \therefore A \propto 1/v \text{ 因為 } v_2 > v_1, \text{ 所以 } A_2 < A_1$$

常見錯誤：多數人可接受 $v_2 > v_1$ 的結果，但卻無法掌握 $P_1 = P_2$ 的推論。常見困難包含：(1) 直接根據點 1 較比 2 高，推論 $P_2 > P_1$ ，忽略了流速也會影響壓力的概念；(2) 誤用連續方程，直接判斷 $v_2 = v_1$ ，忽略了點 1 到點 2，並無水管固定其截面積，所以 $A_1 \neq A_2$ ；(3) 有人雖然推得 $\therefore h_1 > h_2 \therefore v_2 > v_1$ ，卻以“自由落體”來解釋，而沒能引用更恰當的原理～“白努力方程”。兩個原理雖然都依據“能量守恆定則”而得，但“自由落體”僅探討速率 (v) 與高度 (h) 兩變因的關係 $[v(h)]$ ，而“白努力方程”則同時探討流速 (v)、高度 (h)、及壓力 (P)，三者的關係 $[v(h, P)]$ 。對於流體而言，‘白努力方程’是較恰當的原理，因為其能兼顧所有的變因。

第3、4題

正確觀念：多數同學成功引用「連續方程」，因為點3與點4在同一管子上，截面積相同，推得兩點水流速率相等 ($A_3=A_4 \Rightarrow v_3=v_4$)。接著，再透過「白努力方程」，則可判斷兩點水壓，因為 $v_3=v_4$ ，且點4較點3低 ($h_3>h_4$)，所以點4的水壓較點3大 ($P_4>P_3$) (第3題)。

根據以上，判斷點3與點4的水壓，是先根據「連續方程」，由截面積判斷流速 ($A \Rightarrow v$)，再根據「白努力方程」，由流速 (v) 及高度 (h)，推出水壓 ($v \& h \Rightarrow P$)。因此，兩個方程皆需用到 (第4題)。

常見錯誤：多數同學雖然能正確選擇 $P_3 < P_4$ ，且引用「連續方程」及「白努力方程」兩項原理。但卻僅根據高度來解釋水壓 ($h \Rightarrow P$): $\because h_3 > h_4 \therefore P_3 < P_4$ ，沒能提及流速 (v) 對水壓 (P) 的影響，論述稍嫌不足。

第5~6題

正確觀念：點4與點2都與外面的大氣接觸，根據題幹「水流穩定」的條件，兩點的水壓，都需與大氣壓力相等 ($P_4=P_{\text{air}}$ 且 $P_2=P_{\text{air}} \Rightarrow P_4=P_2$)，達到**力平衡**，才能維持同一點的水流速率穩定 (第5、6題)。因此， P_4 及 P_2 的判斷，僅根據「牛頓力學」中的**力平衡**，不需涉及流體力學的原理。

常見錯誤：雖然這兩題的原理及推理都很單純，同學的答對率，卻出乎意料地低，有人認為“點4的水要流出，則 $P_4 > P_{\text{air}}$ ”；“如果 $P_4 = P_{\text{air}}$ 則水會靜止在點4流不出來”，以上的引述，透露出學生仍抱持著“運動需要力”的迷思，干擾了他們的判斷 (第5題)。根據「牛頓第一定律」，**穩定水流** \Rightarrow 流速維持固定 $\Rightarrow v = \text{常數} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{合力} = 0 \Rightarrow P_{\text{內}} = P_{\text{外}} \Rightarrow P_4 = P_{\text{air}}$ ，同理： $P_2 = P_{\text{air}}$ 。

同時，也有人以“點4低於水瓶的水面，所以 $P_4 = P_{\text{air}} + \rho gh$ ”，推得 $P_4 > P_{\text{air}}$ ，再度透露出，學生忽略了流速對於壓力的影響 ($v \nearrow \Rightarrow P \searrow$)。

另外，也有人雖然正確選了 $P_4 = P_2$ ，卻是根據「白努力方程」，因為點2與點4相同高度來解釋 ($\because h_4 = h_2 \therefore P_4 = P_2$)。此一推理，違反了「白努力方程」，需**限制於同一道流體**的條件 (第6題)。事實上， $P_4 = P_2$ 的判斷，依據「牛頓第一定律」(力平衡) 可快速推得，不需用到「白努力方程」。

第 7、8 題

正確觀念：第 8 題，根據實驗推論，長管點 4 的水流質量流速 ($J=\Delta m/\Delta t$)，需大於點 2，長管的水才能較快流光。但質量流速 (J) 大，不一定就推得點 4 的水流速率 ($v=\Delta s/\Delta t$) 較點 2 大，因為點 2 的截面積小於點 4 ($A_2 < A_4$)。

第 7 題，探討點 4 及點 2 的水流速率 (v)，需根據「白努力方程」(如圖 2)，先比較短管的點 a 及點 2，兩點壓力相等 ($P_a=P_2=P_{\text{air}}$)，且點 2 較低 ($h_a > h_2$)，所以點 2 流速較快 ($v_2 > v_a$)，假設點 a 的流速近於零，則 $(1/2)\rho v_2^2 = \rho g \Delta h_{2a}$ 。

同理，長管的點 4 及點 b 的壓力也相等，故點 4 的流速，也僅與兩點高度差有關：

$$(1/2)\rho v_4^2 = \rho g \Delta h_{4b}$$

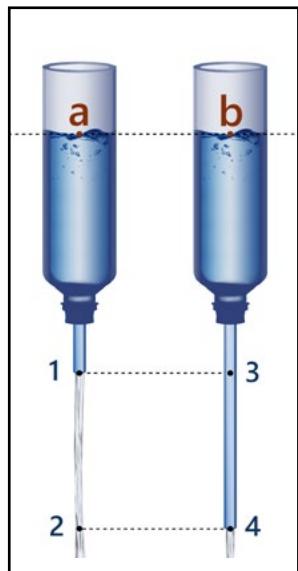


圖 2：不同位置的壓力

比較上述兩式，因為 $\Delta h_{2a} = \Delta h_{4b}$ ，所以點 2 及點 4 的速率相等 ($v_4 = v_2$)。需提醒的是，「白努力方程」需**限制在同一道流體**，才能比較兩點間的關係。因此，應分別探討長管及短管不同高度 (h) 的壓力 (P) 及水流速率 (v)，不能直接拿長、短管的兩點 (如：點 2 及點 4) 來比較。

既然得到 $v_4 = v_2$ ，且已知 $A_4 > A_2$ ，所以點 4 的質量流速 ($J=\Delta m/\Delta t$) 較點 2 大，因為 $J=\Delta m/\Delta t = \rho \cdot (\Delta V/\Delta t) = \rho \cdot A \cdot (\Delta s/\Delta t) = \rho \cdot A \cdot v \Rightarrow J \propto A, v$ 。此一理論的推導，與所觀察之實驗結果相符：長管的水較快流光。

常見錯誤：第 7 題，許多學生誤選了 $v_4 > v_2$ ，所持的理由是：“因為 $v_2 > v_1$ 且 $v_3 = v_4$ ，又因點 1 與點 3 等高，得到 $v_1 = v_3$ ，所以 $v_2 > v_4$ ”。上述解釋，錯在 $v_1 = v_3$ 的推論，兩點雖然等高，但壓力並不相等 ($P_3 < P_1$)，所以兩點速率不同。另外，也有人直接從觀察長管的水較快流光，直接推導點 4 速率較點 2 快 ($v_4 > v_2$)，忽略了截面積 (A) 的變因。

至於水流質量速率 ($J=\Delta m/\Delta t$) 的判斷(第 8 題)，有人直接根據「連續方程」，推得質量流速 ($J=\Delta m/\Delta t$) 保持定值，而推論 $J_4 = J_2$ ，忽略了「連續方程」是探討**同一道流體**，不同截面處的質量流速固定，因此不適用於兩道不同的水流。事實上，點 2 及點 4 的質量流速 (J) 並不相等 ($J_4 > J_2$)，因為它們是兩道不同的流體。

也有人從第 7 題的流速關係，直接推得質量速率 ($\because v_4 < v_2 \therefore J_4 < J_2$)，再次顯示出忽略了兩點的截面積並不相同 ($A_4 > A_2$) 的盲點。影響水流量速率 (J) 的變因，除了水流率 (v) 之外，還包含截面積 (A)。

——| 重要概念及常見盲點 |——

綜合以上，本單元需要統整「伯努力方程」、「連續方程」、及「力平衡」(牛頓第一定律)，三項原理。推理時所需的重要概念，及學生常見的盲點歸納如下：

首先，「伯努力方程」探討同一道流體在不同高度 (h)、不同流速 (v) 的壓力 (P)。高度越高，或流速越快，都會導致壓力越小。因此，因果關係上是 $h, v \Rightarrow P$ ，高度與速率是影響壓力的原因。但推導流程不一定順著因、果的流程，有時候也需從結果 (P) 來反推原因 (v)，例如：第 2 題需從 [力平衡] 推得 P_1, P_2 ，再根據高度差反推得到 v_1, v_2 之關係。這類型**反向推理**的問題，經常困擾學生，也是學習上需要多加練習的題型。

其次，「力平衡」概念，是本單元的推理起點，「牛頓第一定律」強調，維持等速度運動的物體，所受的合力為零 ($v=\text{constant} \Rightarrow \Sigma F=0$)。但許多學生仍存有“運動需要外力”的迷思，並將此迷思應用在本單元 (流體) 的情境中，導致錯誤 (如：第 5 題)。

第三，「伯努力方程」涉及高度 (h)、流速 (v)、及壓力 (P)，三個變因的關係，影響流體壓力的原因，除了高度以外，還有流速。**推理時需要掌握所有變因**，才能推得正確的結論。然而，許多同學僅運用高度越高，壓力越小的推理 ($h \nearrow \Rightarrow P \searrow$)，沒有顧及另一項變因：流速對壓力的影響 ($v \nearrow \Rightarrow P \searrow$) (如：第 2 題)。同理，也有人認為水流速率越大，則**質量流速**必然越大 ($v \nearrow \Rightarrow J \nearrow$)，也是沒能顧及影響質量流速的另一項變因：截面積 (如：第 8 題)。

第四，本單元看到許多學生判斷壓力時，僅考慮高度 ($h \nearrow \Rightarrow P \searrow$)，忽略流速的變因，可能與目前**課綱內容**，**侷限於靜態流體**有關。國內中學生僅學到 $P=\rho gh$ 公式，但沒有學到動態流體時，速率對壓力的影響 ($v \nearrow \Rightarrow P \searrow$)，因而誤導了推理。考量知識的完整性，建議中學課綱，最好能納入「伯努力方程」與「連續方程」，才能建立完整的「流體力學」概念。

最後，所有的定律皆有它的**限制條件**，如：「伯努力方程」及「連續方程」，皆是針對**同一道流體**，所得到的結論。但學生的作答中，卻經常出現直接拿不同流體間的兩點來比較，如：直接比較點 1 與點 3 (第 7 題)，或點 2 及點 4 (第 6 題)，都是忽略了現制條件的結果。

——
作 | 張慧貞 教授
者 | 彰化師範大學物理系物理教育組