

## 觀念物理－解答

## 滾動力學：定律的因果與限制

## 詳解與困難剖析

針對本單元 (如圖 1)，所有試題的正確答案、常見錯誤選項、及試題難度，列於表 1，並說明如下。

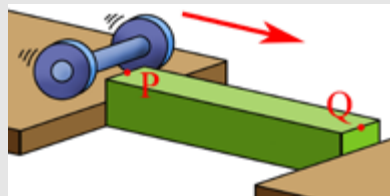


圖 1: 啞鈴上下階梯

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正確答案	B	B	A	B	A	B	A	B	B	B
常見誤答	無	無	B	C	B、C	A	B	A	C	C
難度	易	易	中	易	難	難	難	難	難	難

## 第 1、2 題

**正確觀念：**欲判斷啞鈴卡入 P 點時，所受摩擦力的方向，可以分別透過**因與果**來推理。摩擦力會導致**速度變化**的結果 (因  $\vec{F} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \Delta \vec{v}$  果)，當啞鈴滾到 P 點瞬間，滾動的轉軸 (接觸點) 由原來的地面移到 A 點 (如圖 2 所示)。物體滾動時，接觸點為瞬間靜止點，其餘各質點會對接觸點做**純轉動**。因此，

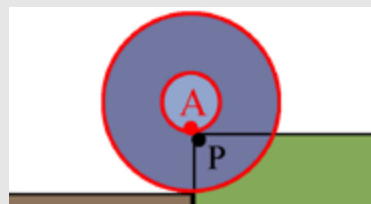


圖 2: 啞鈴卡上階梯

啞鈴 A 點在卡入階梯前，速度向前，而卡入之後 A 點因成為新的轉軸，而呈現靜止。因此，卡入階梯的過程中，啞鈴 A 點的**速度變小**，故所受摩擦力**向後**。(第 1 題)，其推理流程為： $\Delta \vec{v} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \Sigma \vec{F} \Rightarrow \vec{F}_f$  (摩擦力)。同時，因為摩擦過程中，在啞鈴的 A 點有速度變化，故接觸面有**滑動**，屬於**動**摩擦力。

另外，也可以透過摩擦力的**成因**判斷，引入接觸面的「細觀圖」(mesoscopic diagram)，根據圖 3 的推理流程，來判斷摩擦力的方向。推理步驟為：(1) 先畫出上下鋸齒狀的介面，並畫出上方 (啞鈴) 速度 (向右)、(2) 上方的右側會卡到下方左側、(3) 啞鈴 (上方) 所受摩擦力向左。

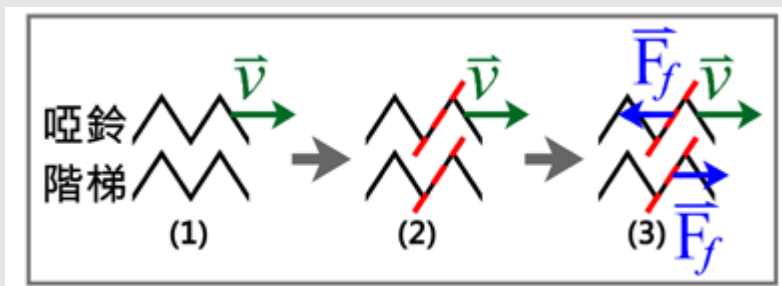


圖 3: 細觀圖判斷摩擦

因為卡上P點的過程，啞鈴受到向後的摩擦力作用，根據 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ ，合力( $\Sigma \vec{F}$ )等於摩擦力(向後)，所以加速度( $\vec{a}$ )也向後，使得質心速率減小(第2題)。值得注意的是，此外力雖然不作用在質心，但牛頓第二定律依然成立，只是公式中的加速度僅限於質心，完整的公式應為 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ 。換句話說，無論外力的作用點在哪裡，質心的加速度都可以透過 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ 推算。

**常見錯誤：**雖然多數同學均能選對摩擦力向後(第1題)，但其推理依據卻顯得粗糙，例如：“摩擦力與施力方向相反”、或“摩擦力與運動方向相反”。這兩種說法都不夠精確。摩擦力可使物體減速，但也可能是加速的效果。判斷摩擦力的方向，還是須依照上述**因果**的途徑，透過「細觀圖」或「速度變化」仔細推理。

第2題的答對率也很高，但許多同學對於質心速率的推理解釋，也不盡周延。例如：“因為摩擦力持續對啞鈴作負功，所以速率下降”，其不當之處包含：(1) 摩擦力不一定對物體作負功，有可能作正功(當摩擦力與物體滑動同向時)，也有可能不作功(當物體受到靜摩擦時)；(2) 即使摩擦力作負功，透過「功能原理」，僅能推出「總動能」下降，然而，「總動能」包含質心的平移動能，及轉動動能，因此質心速率不見得會減小。判斷質心速率的變化，須由合力方向(透過 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ )，而不能從外力作功(能量)。

也有人解釋“接觸面增加，所以摩擦力增加，速率下降”，透露出多項迷思需要更正，包含(1) 摩擦力大小與接觸面積無關、(2) 摩擦力不必然使物體減速，也可能加速、(3) 判斷速率的變化，須依據外力方向，而不是外力大小；如果確定外力為阻力，無論阻力變大或變小，速率都會減小。

### 第3~5題

**正確觀念：**判斷**角動量變化**，可由其原因，透過**力矩方向**來決定。

根據 $\vec{\tau} = \Delta \vec{L} / \Delta t$ ，由圖4得知，摩擦力對於質心的力矩為順時針，與原有的轉動角速度同向，故**角動量**會增加(第5題)。由於力矩使角動量增加，透過 $L = I\omega$ ，啞鈴卡上P點後，轉動慣量( $I$ )減小，所以轉動角速率( $\omega$ )會增加(第3題)。須提醒的是，或許有人會想用 $\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = I(\Delta \vec{\omega} / \Delta t)$ ，由力矩來推導角速率變化，但因其中的轉動慣量( $I$ )並非定值， $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ 公式並不適用，應該用 $\vec{\tau} = \Delta \vec{L} / \Delta t = \Delta(I\vec{\omega}) / \Delta t$ ，透過力矩推導角動量變化，再考量轉動慣量變化，最後才得知角速率變化。

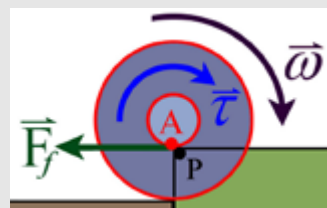


圖 4: 摩擦對質心的力矩

至於總動能變化，則需根據「功能原理」，因啞鈴在A點受到動**摩擦力(向後)**，且A點在卡入過程有向前滑動(如圖5)，所以摩擦力對啞鈴作負功，總動能減小(第4題)。

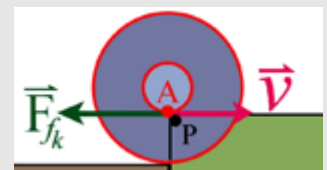


圖 5: 接觸點之速度與摩擦力

綜合以上，摩擦力同時減小質心的速率，但卻增加旋轉角速率，前者根據力的方向，而後者根據力矩方向來判斷。同時，因動摩擦力作負功，所以總動能減小，因此增加的轉動動能，並不足以彌補所減少的平移動能。

**常見錯誤：**角動量判斷 (第 5 題)，許多人直接套用「角動量守恆」，卻忽略了此守恆條件，需不受力矩作用。也有人誤從「動量」推「角動量」，例如：“因受到摩擦，動量減小，所以角動量減小”，忽略了過程中轉軸已經改變，動量與角動量的變化不必然一致 ( $L = mrv = rp$ )。至於角速率變化 (第 3 題)，許多同學誤以為，“速率減小，所以角速率減小”，忽略了兩者影響成因的不同，前者是受外力影響，而後者則是力矩。也有人認為“轉動慣量減小，所以角速率增加”，誤用了角動量守恆。

另外，雖然有近一半的人，正確選擇總動能減小 (第 4 題)，多數卻僅解釋：“因為有摩擦，所以動能減小”，沒能釐清**動**摩擦與**靜**摩擦的差異，因為靜摩擦並不作功，故不會影響總動能。即使確定為動摩擦，也可能作負功或正功，需進一步釐清施力與位移的方向關係，才能確定對動能的影響。另也有人直接以“力學能守恆、因高度不變，位能不變，所以動能不變”，顯示他們未能掌握「力學能守恆」，需在沒有非保守力 (如：摩擦力) 作功的前提之下，才能成立。

## 第 6、7 題

**正確觀念：**當啞鈴滾到 Q 點，滾動轉軸由 Q 點往下移到 C 點 (如圖 6)。因原來的轉軸在 Q 點，且轉動為順時針，所以 C 點原先具有向左速度，但接觸地面後，C 點成為新的轉軸，成為瞬間靜止點。因此，C 點在卡回地面的過程，其速度由向左變成靜止，因此有滑動現象，且速度變化為向右，故摩擦力為**動**摩擦，向右 (第 6 題)。推理流程為： $\Delta \vec{v} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \Sigma \vec{F} \Rightarrow \vec{F}_f$  (摩擦力)，由**結果**推出所需的**原因** (摩擦力)。

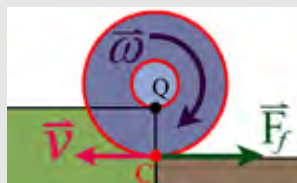


圖 6: 下階梯之摩擦力

另外，也可透過「細觀圖」，類似圖 3 的步驟，推導摩擦力方向。啞鈴的 C 點落地前速度向左，推得啞鈴在 Q 點，所受地面的摩擦力向右。

接著，因啞鈴在 C 點受到向右的摩擦力，與質心速度**同向**，根據  $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ ，摩擦力會使質心速率增大 (第 7 題)。值得一提的是，摩擦力雖與質心速度同向，但是卻與啞鈴接觸點 (C 點) 的原有速度**反向**。

**常見錯誤：**雖然第 6、7 題的推理途徑，跟第 1、2 題一致，但答對率卻低很多。許多學生仍存有“摩擦會與外力反向”，“摩擦會阻止運動”的粗略想法，而沒能掌握**因、果**的邏輯推導：缺乏「細觀圖」 (如圖 3) 的工具，也沒能明確連結牛頓第二定律，來推理摩擦力。

## 第 8~10 題

**正確觀念：**因摩擦對質心的力矩 (逆時針)，與滾動方向 (順時針)，彼此反向，透過  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ ，力矩會使角動量減小 (第 10 題)。接著，根據角動量定義  $L = I\omega$ ，因轉軸往下移到 C 點時，使轉動慣量增加，所以角速率會減小 ( $L = I\omega$ ,  $\therefore L \searrow$  且  $I \nearrow$ ,  $\therefore \omega \searrow$ )，判斷角速率的流程為  $\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} \Rightarrow \Delta \vec{L} \Rightarrow \Delta I, \Delta \omega \Rightarrow \Delta \omega$  (第 8 題)。

至於動能變化，則可透過「功能原理」，因啞鈴在 C 點所受的摩擦力向前，而 C 點在摩擦力卡入的瞬間，速度是向後，所以摩擦力與 (接觸點) 位移**反向** (如圖 6)，摩擦力作負功，故可推得啞鈴之總動能會減小 (第 9 題)。

**常見錯誤：**超過半數的同學選擇角動量不變 (10 題)，所持的理由包含“啞鈴不受外力”，或粗略地從“動量守恆”、“質量不變”、“轉速不變”來推得角動量守恆。事實上，此題的動量、角速率皆不固定，且也受外力（摩擦）作用。也有人透過定義（ $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ ），直接由質心速率變化，推出角動量變化（ $\Delta \vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{L}$ ），卻忽略了上式僅適用在質點，不適用於有體積的啞鈴，因為轉軸已經改變，每個質點的旋轉半徑（ $r$ ）、速率（ $v$ ）都會改變，變化過程相當複雜，無法據以推論。

第8題，部分同學直接由速率變快，推出角速率增加，透露出 $\vec{v} \Rightarrow r\vec{\omega}$ 的推理，但因為轉軸的位置已經改變，其中的 $r$ 必非定值，故推論錯誤。也有人根據「角動量守恆」，透過 $L = I\omega$ ，轉動慣量增加，所以角速率減小（ $I \nearrow \Rightarrow \omega \searrow$ ）。雖然結果沒錯，但所根據的「角動量守恆」卻不正確，因為啞鈴有受到外力（摩擦）力矩作用。

有多人選擇總動能不變（第9題），其理由非常多樣化，包含：“能量守恆，且高度不變”、“沒有外力”、“因路面相同”...等，透露出各種觀念上的瑕疵。也有多人直接由質心速率增加，推得總動能增加，未能顧及轉動動能減少的因素。

## 不當推理及有效策略

綜合上述，可歸納出下幾點重要的推理策略，以及常見的概念盲點：

首先，物理定律（公式）可描述物理量間的「因、果關係」，往往是推導物理問題的有效起點。例如： $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$  說明力矩是改變角動量的原因，透過力矩方向，可以判斷角動量的增加或減小（第5、10題）。再如，「功能原理」說明「外力作功」可改變總動能（第4、9題）。

其次，同一物理量，往往包含在多重公式中，推理時往往需要仔細從中選擇有效的途徑。例如：角動量變化，無法透過 $L = I\omega$ 的定義，因為其中的 $I$ 及 $\omega$ 之變化方向各異，則無法透過此式，推出角動量是增加或減少（第5、10題）。

最後，「守恆定律」也是物理概念推理的重要依據，但使用前需能掌握守恆的條件。例如：「力學能守恆」的條件，不能有「非保守力」（如：摩擦力）作功，而「角動量守恆」，則須在合力矩為零的前提之下，才能成立。此單元所有試題因涉及摩擦（包含：力、力矩，作功），因此動能、動量、及角動量，皆不守恆。

註：

1. 本單元試題改編自 Hewitt (2010) Phys. Teach. 566.
2. 彰師大物理系 106 級師培生陳宏錡，協助試題情境的延伸
3. 「細觀圖」判斷摩擦，參考 Besson & Viennot (2004) Int. J. Sci. Educ. 1083-1110.
4. 課堂使用時，可拆成二階段（第1~5題，第6~10題）測試及講解，提供學生反覆練習與引導