

觀念物理一試題

「牛頓擺」 & 「完全非彈性擺」



張慧貞 教授

國立彰化師範大學物理系 物理教育組

2000 年於紐西蘭 Waikato University 取得科學教育博士，研究興趣從早期的「互動教學」，逐漸轉移到物理「教材教法」的研發。近年來，主要聚焦於融合多重表徵，包含教具、圖片、照片，來開發觀念試題，根據社會文化觀的學理主張，提供學生周延的教學鷹架，以有效促進學生的概念理解。

透過有趣的「牛頓擺」(彈性球)與「完全非彈性擺」，本單元將釐清「動量守恆」與「動能守恆」的概念與區別。(影片：<https://youtu.be/GuDD0AuzTy0>)

小試身手

(I) 第 1~5 題，請根據以下條件作答：

「牛頓擺」包含 5 顆鋼球，分別由尼龍繩繫在架上，已知這些鋼球之間為「彈性碰撞」，當拉起 1 號球釋放甩下後(如圖 1)，5 號球會彈起相同高度(如圖 2)，其餘 4 顆球維持靜止。

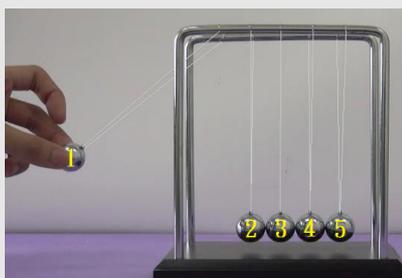


圖 1：牛頓擺

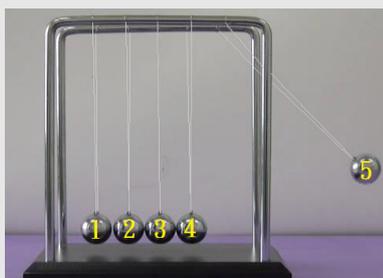


圖 2：鋼珠之間彈性碰撞

() 1. 若同時提起 1、2 兩顆球，釋放後與其他 3 顆球碰撞(如圖 3)。則系統的總動能 (E_k) 與總動量 (P)，在碰撞前、後的變化，下列何者正確？

- (A) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
- (B) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$
- (C) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
- (D) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$

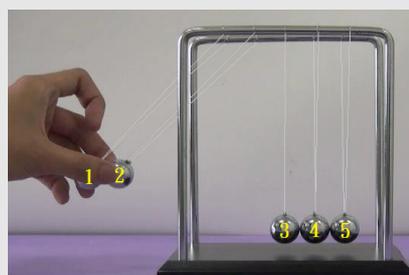


圖 3：兩顆球撞三顆球

() 2. 若同時提起 1、2、3 三顆球，釋放後與其它 2 顆球碰撞。則系統的總動能 (E_k) 與總動量 (P)，在碰撞前、後的變化，下列何者正確？

- (A) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
- (B) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$
- (C) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
- (D) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$

() 3. 承上題，1、2、3 三顆球釋放後與其他 2 顆球碰撞，則會觀察到

- (A) 只有 5 號球彈起
- (B) 4、5 號球一起彈起
- (C) 3、4、5 號球一起彈起
- (D) 所有的球一起甩起

- () 4. 先將 1、2 兩球收起，再將 4、5 號球以雙面膠黏在一起，提起 3 號球後碰撞，結果只有 4、5 號一起彈起，3 號球維持靜止 (如圖 4 所示)，則系統的總動能 (E_k) 與總動量 (P)，在碰撞前、後的變化，將會如何？

- (A) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
 (B) $E_{k前} > E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$
 (C) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} > P_{後}$
 (D) $E_{k前} = E_{k後}$ ，且 $P_{前} = P_{後}$

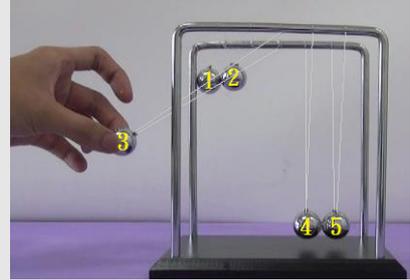


圖 4：3 號球撞 4+5 號球

- () 5. 承上題，碰撞後 (4+5 號) 球升起之高度，對碰撞前 (3 號) 球提起之高度比值為何？

- (A) $1/\sqrt{2}$ (B) $1/2$ (C) $1/4$
 (D) $1/5$ (E) 以上皆非

(II) 第 6~8 題，請根據以下條件作答：

現將所有的鋼球，換成彼此會形成「完全非彈性碰撞」的球 (碰撞後會黏在一起)，製成「完全非彈性擺」(如圖 5)

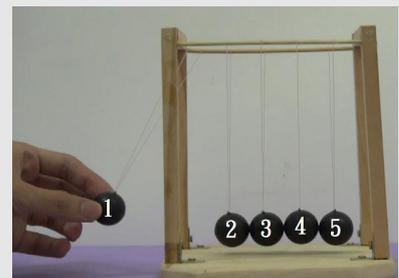


圖 5：完全非彈性擺

- () 6. 若提起 1 號球釋放後，與其它 4 顆球相碰撞，則會觀察
 (A) 只有 5 號球彈起 (B) 4、5 號球一起彈起
 (C) 2、3、4、5 號球一起彈起 (D) 所有的球一起甩起 (E) 所有的球維持靜止
- () 7. 承上題，系統的總動量 (P)，在碰撞後，損失了原來的多少比例？
 (A) 0% (B) 20% (C) 67% (D) 80% (E) 100%
- () 8. 承上題，系統的總動能 (E_k)，在碰撞後，損失了原來的多少比例？
 (A) 0% (B) 20% (C) 67% (D) 80% (E) 100%
- () 9. 滿足「動量守恆」的條件，下列敘述何者最適當？
 (A) 外力 = 0 (B) 非保守力 (如：摩擦力) = 0 (C) 兩者皆是 (D) 兩者皆非
- () 10. 滿足「力學能守恆」的條件，下列敘述何者最適當？
 (A) 只有內力作功 (B) 只有保守力作功 (C) 兩者皆是 (D) 兩者皆非

觀念物理 — 解答

「牛頓擺」 & 「完全非彈性擺」

詳解與困難剖析

針對「牛頓擺」(如圖 1)及「完全非彈性擺」(如圖 2)的問題，每題的正確答案、常見錯誤選項、及試題難度，列於表 1，並說明如下。

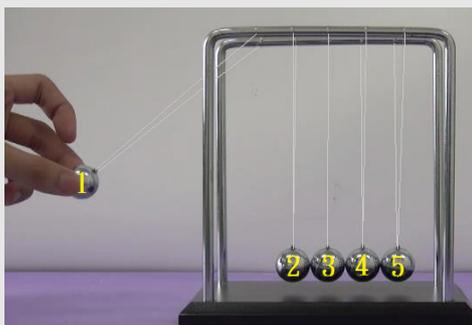


圖 1：彈性碰撞的牛頓擺

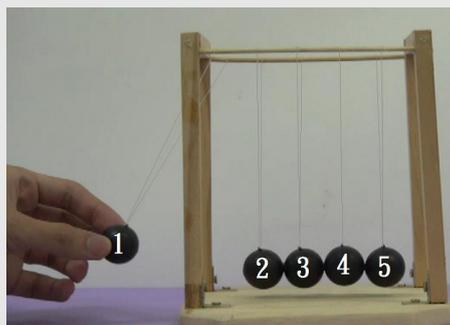


圖 2：完全非彈性擺

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

題 號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正確答案	D	D	C	B	C	D	A	D	A	B
常見誤答	無	B	B, D	A, C, D	B	A, E	D	E	C	A, C
難 度	易	中	中	難	難	難	難	難	中	難

本單元藉由不同條件下的「碰撞」，來挑戰讀者對於「動量守恆」與「力學能守恆」的概念，並釐清它們的區別。正確觀念與常見錯誤說明如下：

第 1 ~ 3 題

正確觀念：第 1~3 題皆屬於「彈性碰撞」，「彈性」則「動能守恆」，「碰撞」則「動量守恆」，故動量與動能皆同時守恆，第 1、2 題答案皆為 (D)。守恆的原因如下：「動能守恆」不能涉及「非保守力」(如摩擦力)作功，而牛頓擺的鋼球之間因為是「彈性」碰撞，所以無動能損失。同時，碰撞瞬間因無外力作用，根據 $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ ，當外力 = 0， $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p} = 0$ ，所以，只要無外力作用，則系統前、後之「動量守恆」。

第 3 題，因為「動量」與「動能」皆守恆， $\therefore \Sigma m_i v_i = \Sigma m_f v_f \therefore v \propto 1/m$ ，且 $\therefore \Sigma (1/2)m_i v_i^2 = \Sigma (1/2)m_f v_f^2 \therefore v \propto 1/\sqrt{m}$ ，須同時滿足 $v \propto 1/m$ 及 $v \propto 1/\sqrt{m}$ ，故碰撞前後之質量需固定 ($\Sigma m_f / \Sigma m_i = 1$)，鋼球數相等。所以當 1, 2, 3 號球一起被釋放，將會彈起 3, 4, 5 號球，使碰撞前、後的質量相等。

常見錯誤：對於此項「彈性碰撞」的題組，學生主要的困難不在「動量 / 動能皆守恆」的認定，而是被撞體與撞擊者的區別。當二顆下 \Rightarrow 二顆上 (第 1 題) 普遍答對的同時，三顆撞兩顆 (第 2, 3 題) 卻顯得相對困難。需要克服的瓶頸在於：這五顆球可自由分離，所以 3 號在碰撞後，會與 2 號球分離，結合 4, 5 號球一起彈起，以滿足動量 / 動能皆守恆。

第 4、5 題

正確觀念：第 4 題因為是 4, 5 號球黏在一起，3 號球落下 \Rightarrow 4+5 號彈上 (如圖 3)，且為「碰撞」(只有內力沒有外力)，故「總動量守恆」

[$\because p_{初} = p_{末} \Rightarrow mv_{初} = (2m)v_{末} \Rightarrow v_{末} = v_{初}/2$]，再根據末速 ($v_{末}$) 推算動能，發現動能會有損失：

$$E_{k末} = (1/2)(2m)(v_{末}^2) = (1/2)(2m)(v_{初}/2)^2 = (1/2)E_{k初}, \therefore E_{k末} < E_{k初}。$$

動能損失的原因為 4, 5 號球黏在一起之處，在碰撞瞬間會有摩擦力(內力)消耗能量。因此，當**摩擦力(內力)作負功時，會消耗動能，但此摩擦因是內力，故不會損耗動量。**

接著，推算彈起高度時(第 5 題)，需將全部過程拆成**甩下 \Rightarrow 碰撞 \Rightarrow 甩上**三階段，其中除了「碰撞」瞬間會有動能損失之外(損失 50%)，甩下及甩上兩過程都能維持力學能守恆。

所以位能也僅剩原來之 50%， $\therefore mgh_{末} = (1/2)[(2m)gh_{初}] \therefore h_{末}/h_{初} = 1/4。$

常見錯誤：第 4 題的推理困難相當多元，包含：(1) 雖然理解「非彈性」時，動能不守恆，但以為動量也不守恆(選 A)；(2) 理解所有的「碰撞」，動量皆守恆，但也同時濫用了能量守恆(選 D)。選(A)跟(D)都透露出他們對「動量」與「動能」概念的混淆；(3) 認定鋼球為「彈性」(動能不變)，卻忽略了**黏著處會有能量消耗**(選 C)。

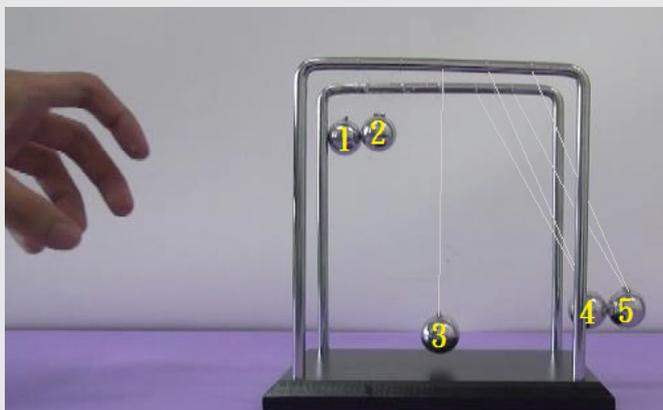


圖 3：3 號球撞 4+5 號球

第 5 題很多人誤選了 $(h_{末}/h_{初})=1/2$

，透露出學生全程(甩下 \Rightarrow 碰撞 \Rightarrow 甩上)套用「力學能守恆」[$mgh_{初} = (2m)gh_{末}$]，缺乏「非彈性」碰撞時，動能會損失的概念。本題需切割成「甩下/甩上」，及「碰撞」兩種現象，前者滿足「力學能守恆」，而後者符合「動量守恆」，兩原理須整合且分別套用，故推理比較迂迴，難度很高。

第 6 ~ 8 題

正確觀念：「完全非彈性擺」(如圖 2 所示)，其中的「完全非彈性」代表碰撞後物體會**黏在一起**，所以動能會有損失，而「碰撞」則代表系統維持「動量守恆」，故碰撞前後動量損失 0% (第 7 題)，所以碰撞後系統不能靜止，所有五顆球會黏在一起甩起(第 6 題)(如影片所示)。至於動能損失，則可根據「動量守恆」推得， $\therefore mv_{初} = (5m)v_{末}$ ， $v_{末} = (1/5)v_{初} \therefore E_{k末} = E_{k初}/5$ ，末動能損失了原來的 80% (第 8 題)。

常見錯誤：許多學生可能將「完全非彈性」視為動能全部損耗，因而選擇碰撞後所有的球維持靜止(第 6 題)，學生解釋說：“系統內動能被**完全非彈性球吸收**”，忽略了動量仍會守恆。球內的**摩擦力不會損耗動量**，所以整體末速不能為零。另外，有部分選擇 5 號彈起，忽略了「完全非彈性」會「黏在一起」的性質。

第 9、10 題

正確觀念：「動量守恆」的條件為 $\boxed{\text{外力}=0}$ (第 9 題)，其原因需要整合兩項定律：(1) $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ ，(2) 作用力與反作用力定律，只要是系統內力 (包含摩擦力)，因為大小相等方向相反，所以內力總合必抵銷，故 $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ 公式中的「合力」($\Sigma \vec{F}$) 只需考慮外力，當外力合為零 $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0, \Delta \vec{p} = 0$ ，前後「動量不變」。所以只要沒有外力作用，只有內力 (如：碰撞或爆炸)，則滿足「動量守恆」。本單元第 4~8 題雖然有摩擦力的涉入，但因均為內力，所以維持動量守恆。

而「力學能守恆」則不能涉及「非保守力」(如摩擦力)的作功 (無論此摩擦是內力或外力)，內力的總合會抵消 (方向相反)，但此內力若為摩擦力，則作功必為負，因此會損耗能量 (第 10 題)。

因「保守力作功」的大小，僅與起點及終點有關，不受過程軌跡的影響，所以若物體僅受「保守力」(如重力)作功，則可以用「位能」(能量變化僅與位置有關)表示：重力作功 (W_g) 等於位能變化 (ΔU_g) 的負值，根據「功能定理」，外力作功 = 動能變化：

$$\because W_g = \Delta E_k \text{ ---(1), 且 } W_g = -\Delta U_g \text{ ---(2), } \therefore \Delta E_k = -\Delta U_g \Rightarrow \boxed{E_k + \Delta U_g = \text{常數}} \text{ ---(3)}$$

在 (1) 式中，重力為外力，而 (2) 式、(3) 式中引入了重力位能時，重力則是為系統內力，故此時系統已涵蓋了物體與地球。

常見錯誤：根據學生的作答解釋，學生較容易掌握「動量守恆」的條件為「不受外力」。但「力學能守恆」的條件則困擾著許多人，主要的困難包含：(1) 以為「內力」不會影響力學能，忽略了摩擦力 (內力) 仍可能消耗能量，本單元的第 4~8 題，皆是摩擦內力消耗能量的情形；(2) 不理解「保守力」/「非保守力」的意義與用途。

不當推理及有效策略

綜合以上，當學生面對「彈性碰撞」與「完全非彈性碰撞」時，往往會對「動量守恆」及「力學能守恆」的限制條件感到混淆，前者僅限「內力」作用，而後者僅限於「保守力」作功。這些術語是因原理之所需而被創造的，所以，術語的意義與原理的內涵需要合併學習，探求彼此的來龍去脈 (what & why)。

「動量守恆」需結合 $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ ，及「反作用力定律」，才得以推出其限制條件及適用的用法 (第 9 題)；而「力學能守恆」則結合「功能定理」及「保守力作功」的概念 (第 10 題)。所以，「守恆定律」不是獨立的原理，而是整合其他多項原理概念或術語而得的，仔細回溯這些守恆定律的來龍去脈，才能發揮它們的解題功能，避免誤用。

另外，在作答策略上，對於量化推算的試題，往往需先確定守恆 (不變) 的量，再探討變數的關係 (如第 8 題)。而表面看似計算題，其實只需掌握其守恆的概念即可得解，不須計算 (如第 7 題)。測試結果顯示，往往不需計算的純概念題，會比直接套公式計算的題目來得具挑戰性。類似的題目值得繼續開發，以養成學生「概念先於計算」的解題習慣。

註 1：「完全非彈性擺」教具，參閱 Kagan, D. (2010). Happy balls, unhappy balls, and Newton's Cradle.

The Physics Teacher, 48(3), 152-152.