

簡單機械之功與能

解析

詳解與困難剖析

本單元所有試題的正確答案、常見錯誤、及難度，如表 1 所示：

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正確答案	D	C	A	B	A	C	B	A	C	B
常見誤答	C	A	C	X	C	B	C	C、E	A	A、E
難度	難	難	難	易	難	中	中	難	難	難

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

第 1 ~ 3 題

正確觀念：如圖 1，此人透過兩個定滑輪（改變施力方向），及一個動滑輪（省力裝置），拉動沉重的鋼琴。欲判斷動滑輪下方（P 點）所受的繩子張力，須利用**力平衡**概念，從 $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ，因忽略動滑輪質量，所以動滑輪所受合力 = 0 ($m \rightarrow 0 \Rightarrow \Sigma \mathbf{F} = 0$)。同一條繩子張力固定，所以動滑輪受到上方兩條繩子，各 700 N 的張力 ($2 \times 700 = 1400 \text{ N}$ ，向上)，因此動滑輪下方（P 點）也受到 1400 N 張力（第 1 題）。此張力大小與下方的鋼琴重力無關，因為題目中並未確定鋼琴的加速度為零，所以鋼琴所受合力不為零，即 [P 點張力 \neq 鋼琴重力]。

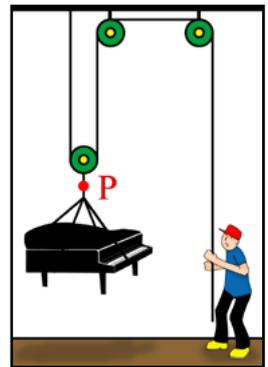


圖 1：滑輪的力與作功

至於此人對鋼琴所作的功 ($W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$)，可以分別由施力者（手），或受力者（鋼琴）的 [力 \times 位移] 推導而得，其中 **F 與 S 指認對象需一致**：

$$W_{\text{人} \rightarrow \text{琴}} = F_{\text{手}} \cdot S_{\text{手}} = 700 \times (2 \times 2) \quad (\text{因手的位移是鋼琴位移的 2 倍})$$

$$= F_{\text{琴}} \cdot S_{\text{琴}} = (700 \times 2) \times 2 = 2800 \text{ J} \quad (\text{第 2 題})$$

比較鋼琴所受繩子（P 點）的張力（1400 N），與所受重力（1200 N），可知手拉力過程，鋼琴會加速向上，所以施力所作的功（W），除了增加鋼琴的位能 (ΔU)，還會增加其動能 (ΔE_k)，根據「**功能定理**」： $W = \Delta U + \Delta E_k \Rightarrow W > \Delta U$ （第 3 題）。另外，從數值推算，也可得到鋼琴位能變化： $1200 \times 2 = 2400 \text{ J}$ ，小於手的拉力作功（2800 J）。

常見錯誤：對於 P 點的張力，有許多同學直接由下方的鋼琴重量來判斷，誤以為 [P 點張力 = 鋼琴重力]，但實際上，鋼琴並未達到**力平衡**，因其加速度並不為零：

$$a \neq 0 \Rightarrow \Sigma \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow [\text{P 點張力}(\uparrow) \neq \text{鋼琴重力}(\downarrow)] \quad (\text{第 1 題})。$$

接著，判斷手對鋼琴的作功大小，許多同學直接套用題目的已知，誤以手的施力與鋼琴位移相乘 ($W = F_{\text{手}} \cdot S_{\text{琴}}$)，運算中因 F 與 S 所對應的對象不一致，而造成錯誤 (第 2 題)。最後，許多同學誤判人對鋼琴所作的功 (W)，與鋼琴位能變化 (ΔU) 的關係，有人以“能量守恆”直接推論 $W = \Delta U$ ，沒有顧及動能變化 (ΔE_k) 的因素，透露出他們對於「功能定理」仍一知半解。也有少數人將動滑輪的“省力”裝置，錯誤延伸到“節省能量”($W < \Delta U$) (第 3 題)。

第 4~6 題

正確觀念：對於槓桿的機械，超過九成的學生，順利根據左右兩側的力臂比較，判斷出圖 2 是省力裝置 ($F < F_g$) (第 4 題)。

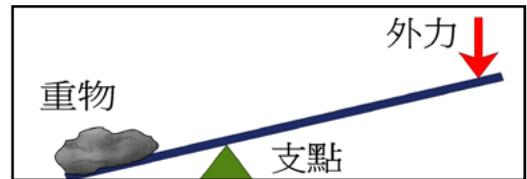


圖 2：省力槓桿

然而，外力對重物的作功，如同滑輪的題目一樣，根據定義，作功等於力與位移的乘積 ($W = F \cdot S$)，其中的 F 及 S 須為同一對象，(如圖 3 所分析)：

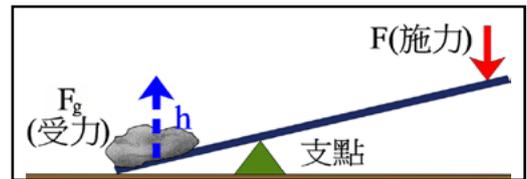


圖 3：槓桿上的作功

$$W_{\text{力} \rightarrow \text{物}} = F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{施力}} = F_{\text{受力}} \cdot S_{\text{受力}} = F_{\text{外力}} \cdot S_{\text{外力}} \\ = F_{\text{重物}} \cdot S_{\text{重物}} = F_g \cdot h > F \cdot h \text{ (第 5 題)}$$

根據「功能定理」：外力對重物所作的功 (work)，等於重物的動能與位能變化 ($\Delta E_k + \Delta U$)。但因為題目設定外力大小，恰好可提起重物，所以物體沒有動能變化 ($\Delta E_k = 0$)，故外力作功，全部提供重物的位能變化 ($\text{work} = \Delta U$) (第 6 題)。

常見錯誤：對於槓桿的題組，約有 4 成學生沒能正確判斷 $\text{work} = \Delta U$ (第 6 題)。其原因包含：(1) 引入錯誤的作功定義，以外力乘以物體的位移，推得 [作功 < 位能變化]：“ $\text{work} = F \cdot h (= F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{物體}}) < F_g \cdot S_{\text{物體}} = \Delta U_{\text{物體}} \Rightarrow \text{work} < \Delta U_{\text{物體}}$ ”。其中，第一個等號是錯誤的，因作功 (W) 所引用的 F 與 S ，指認對象必須一致，不能將施力與受力者混用。另外，也可能以為 [施力位移 = 受力位移] (沒能注意槓桿兩邊的力臂，並不相等)，而造成誤判。類似的錯誤也同時出現在動滑輪系統 (第 5 題)，許多同學誤選了 $\text{work} = F \cdot h$ ，顯示出他們並未注意到 F 與 S 的對象並不一致 ($\text{work} \neq F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{受力}} = F \cdot h$)，透露出對於變數指認對象的忽視。

(2) 直接根據「功能定理」： $\text{work} = \Delta E_k + \Delta U$ ，而誤選了 $\text{work} > \Delta U$ (第 6 題)，沒能意識到此時物體並沒有動能變化 ($\Delta E_k = 0$)，這種錯誤，透露出學生只有套用定理，而沒能引用試題的已知，進行**概念推理**。

(3) 即使成功選擇 $work = \Delta U$ (第 6 題) 的人，也多僅解釋“機械裝置，省力但不省功”，此一解釋僅能排除 $work < \Delta U$ 的選項，無法確定是 $work = \Delta U$ 或 $work > \Delta U$ ？兩者之選擇，需由題目已知：最小外力恰可抬起重物，來進行推理決定。換句話說，若外力超過最小抬起的力，則正確答案就變成 $work > \Delta U$ ，唯有透過概念推理，才能掌握正確解答，不能套招。

第 7、8 題

正確觀念：如圖 4 所示，向左飛行的皮球撞牆壁後，[滑車 + 人] 向左移動，而皮球向右彈回。根據「功能定理」，手對球做功，先成為皮球的初始動能 ($E_{k \text{ 球初}}$)，再轉成碰撞後 [滑車 + 人] 動能、皮球的末動能，及碰撞過程轉換的熱能 (因為試題並未敘明為**彈性碰撞**)

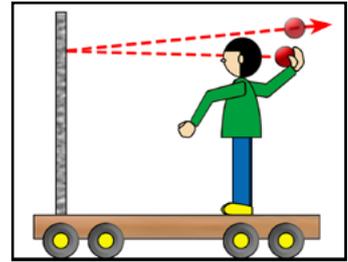


圖 4: 丟球驅動滑車

($W_{\text{手} \rightarrow \text{球}} = E_{k \text{ 球初}} = E_{k \text{ 人+車}} + E_{k \text{ 球末}} + E_{\text{熱能}}$)，因 $E_{k \text{ 球末}} \neq 0$ 且可能有損失熱能，所以 $W_{\text{手} \rightarrow \text{球}} > E_{k \text{ 人+車}}$ (第 7 題)。

至於手對球做功 ($W_{\text{手} \rightarrow \text{球}}$) 的能量來源，則來自手臂的**生化能**，藉由**施力作功**，才使皮球獲得**動能** (Arons, 1999)；接著，皮球的初始動能，在碰撞過程，先與牆壁擠壓，轉換成皮球**彈力位能**，彈力造成與牆壁間的正向力，才能透過正向力作功，轉成 [滑車 + 人] 動能、皮球末動能，及損失的熱能：

$$[\text{生化能} \Rightarrow W_{\text{手} \rightarrow \text{球}} \Rightarrow E_{k \text{ 球初}}]$$

$$[E_{k \text{ 球初}} \Rightarrow \text{球彈力位能} \Rightarrow E_{k \text{ [人+車]}} + E_{k \text{ 球末}} + E_{\text{熱能}}]$$

判斷做功的正、負，需根據 $work = F_{\text{受力}} \cdot S_{\text{受力}}$ ，判斷 $F_{\text{受力}}$ 及 $S_{\text{受力}}$ 兩者的方向關係。正向力對於滑車**牆壁**所作的功，因為正向力 ($N_{\text{牆}} : \leftarrow$) 與牆壁位移 ($S_{\text{牆}} : \leftarrow$) 彼此同向 (如圖 5 所示)，所以 $work_{\text{球} \rightarrow \text{牆}} = N_{\text{牆}} \cdot S_{\text{牆}}$ ：正功。同理，皮球所受正向力作功： $work_{\text{牆} \rightarrow \text{球}} = N_{\text{球}} (\rightarrow) \cdot S_{\text{球}} (\leftarrow)$ ：負功，其中的 $S_{\text{球}}$ 是球的受力點 (牆壁) 位移，所以隨牆壁向左移動 (第 8 題)。

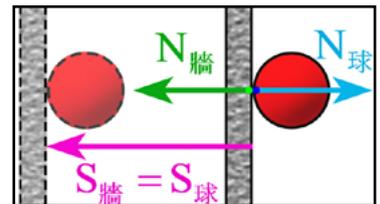


圖 5: 正向力有做功

上述結論，也可由「功能定理」得到驗證，皮球的初始動能，一部分傳給 [滑車 + 人]，所以皮球動能減少，因此，正向力使球減速 (作負功)；而 [滑車 + 人] 所獲得的動能，則來自正向力對牆作正功。

常見錯誤：多數同學已具有「功能定理」的初步概念，但在引用 [作功 = 動能變化] 時，則有許多人誤以為 [手對球作功 = 人 + 車的動能變化] ($W_{\text{手} \rightarrow \text{球}} = E_{k \text{ 人+車}}$)，忽略了皮球撞牆後仍會反彈，所以皮球會帶走部分動能。另外，也有人雖然正確選了 $W_{\text{手} \rightarrow \text{球}} > E_{k \text{ 人+車}}$ 選項，卻僅將原因解釋為“空氣阻力”或模糊的“能量損失”，沒能提到“皮球的反彈動能”(第 7 題)。

至於球撞牆壁時，兩者間的**正向力作功**（第 8 題），更是難倒多數學生，主要的盲點為：(1) 直接套用“正向力不作功”的推論，忽略了球撞牆壁的過程，兩物體的位移 (S)，都與正向力 (N) 平行 (S//N)，因此作功皆不為零；(2) 誤以為球碰撞過程的位移是反彈 (→)，而推出 $\text{work}_{\text{牆} \rightarrow \text{球}} = N_{\text{球}}(\rightarrow) \cdot S_{\text{球}}(\rightarrow)$ ：正功。事實上，正向力僅存在於，球與牆接觸的過程，當球反彈向右移動時，球已經脫離牆壁，故正向力已無法作用。

第 9、10 題

正確觀念：如圖 6 所示，要探討此人推牆而帶動 [人 + 滑車] 後退的過程，手與牆的正向力對人所作的功，根據定義：

$W_{\text{正向力} \rightarrow \text{人}} = F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{施力}} = N(\leftarrow) \cdot 0 = 0$ ，因為手推牆後退的過程，正向力的施力點 (牆壁) 沒有位移，所以正向力不作功 (第 9 題)。

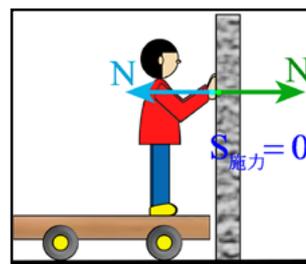


圖 6: 正向力不作功

比較圖 4 與圖 6，皆可探討牆壁的正向力作功，因為前者 (圖 4) 施力過程，施力點 (牆壁) 有位移，所以正向力有作功 ($S_{\text{施力}} \neq 0 \Rightarrow \text{work} \neq 0$) (第 8 題)；而圖 6 則因為施力點在固定的牆上，所以施力點沒有位移，正向力不作功 ($S_{\text{施力}} = 0 \Rightarrow \text{work} = 0$) (第 9 題)。

Arons (1999) 強調，圖 6 的現象，**正向力因為沒有位移而不作功**，他解釋：[滑車 + 人] 因推牆而後退，所獲得動能的能量來源，需由手的**生化能**來解釋：[手的生化能 \Rightarrow 手臂產生形變 \Rightarrow [滑車 + 人] 動能變化]。Arons 也進一步區別「力」與「能量」的效果，手推牆壁而後退的過程中，**正向力**可以解釋 [人 + 車] 的**速度變化** ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$)，但 [人 + 車] 的動能變化，則需透過**能量來源** (手臂的**生化能**) 來加以解釋。

至於腳與滑車間的**摩擦力作功** ($W_{\text{摩擦}}$) (如圖 7 所示)，則雖然過程腳與車之間沒有相互**滑動**，但腳與車皆一起向後移動，摩擦力有位移，因此會作功。根據作功定義：

$$W_{\text{摩擦} \rightarrow \text{人}} = F_{\text{摩擦} \rightarrow \text{脚}}(\rightarrow) \cdot S_{\text{脚}}(\leftarrow) : \text{負功};$$

$$W_{\text{摩擦} \rightarrow \text{車}} = F_{\text{摩擦} \rightarrow \text{車}}(\leftarrow) \cdot S_{\text{車}}(\leftarrow) : \text{正功 (第 10 題)}。$$

其中的 $F_{\text{摩擦} \rightarrow \text{脚}}$ 及 $F_{\text{摩擦} \rightarrow \text{車}}$ 為作用力與反作用力，所以大小相等，方向相反。而 $S_{\text{脚}}$ 及 $S_{\text{車}}$ 則因腳與車一起移動，而大小與方向皆相等，所以 $W_{\text{摩擦} \rightarrow \text{人}}$ 與 $W_{\text{摩擦} \rightarrow \text{車}}$ 絕對值相等，滑車所獲得的動能，由人因腳上摩擦所損失的動能 ($W_{\text{摩擦} \rightarrow \text{人}}$) 來提供。

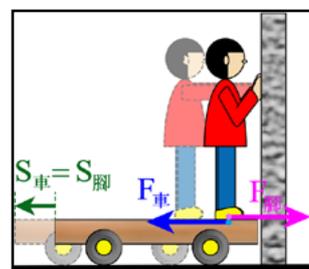


圖 7: 靜摩擦會作功

常見錯誤：對於“正向力作功”的判斷 (第 9 題)，許多人以 $W_{\text{牆} \rightarrow \text{手}} = N_{\text{牆} \rightarrow \text{手}}(\leftarrow) \cdot S_{\text{人質心}}(\leftarrow)$ ，得到正功。因為力 (F) 與位移 (S) 所指認的位置不同，而造成「作功」的誤判。如果 $W_{\text{牆} \rightarrow \text{手}}$ 為正，而 $W_{\text{手} \rightarrow \text{牆}} = 0$ (因為牆沒有移動)，則如何解釋 $W_{\text{牆} \rightarrow \text{手}}$ (正功) 的能量來源呢？因此，

應該解釋成手臂的形變(來自生化能)，造成手臂內力對人作正功，提供[人+滑車]後退的動能變化。

至於判斷“摩擦力作功”(第10題)的錯誤，包含了：(1)許多學生誤以為“靜摩擦不作功，因為沒有移動”，顯示出他們將接觸面間的**滑動**，與受力點的**移動**，混為一談；(2)直接背誦“摩擦力作負功”的答案，未能詳細分析**受力(F)**與**受力位移(S)**的方向關係；(3)也有人因為錯誤判斷(腳及車)所受摩擦力方向，而誤選了(A)選項。

重要概念及常見盲點

綜合以上，本單元探討幾種簡單機械的“作功”及“功能定理”，可歸納出以下幾項核心概念，及常見的概念盲點。

首先，對於施力點與受力點不相同時(如：滑輪系統或槓桿)，「**功能定理**」所描述[作功=能量變化=動能變化+位能變化]，而**作功**： $\text{work} = F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{施力}} = F_{\text{受力}} \cdot S_{\text{受力}}$ ，其中F(力)與S(位移)所指認的位置必須一致。而學生在推論**作功**時，卻經常將施力(F)與位移(S)對象混用，(如第2、5題，以 $F_{\text{施力}} \cdot S_{\text{受力}}$ ，推算外力對物體的作功)，導致後續對於能量變化的誤判。同時，對於「功能定理」，則可能只考慮位能變化，而沒能涵蓋**動能及位能**的變化(如第3題)。

其次，對於會**變形**的物體(非剛體)的問題，如：皮球撞擊牆壁、手臂彎曲推牆壁，則正向力對物體可能作功，也可能不作功。判斷作功所涉及的位移(S)必須是受力點位置，而不是物體質心的位移： $\text{work} = F_{\text{力}} \cdot S_{\text{力}} \neq F_{\text{力}} \cdot S_{\text{質心}}$ (第8、9題)，同時，也只能以**受力的位移**來推算**作功**，而不是**受力的後位移**(如：第8題)。

第三，判斷**摩擦力作功**時， $\text{work} = F_{\text{力}} \cdot S_{\text{力}}$ ，也需掌握位移(S)是站在靜止地面，觀察**受力位置**的位移，而不是看接觸面間的相對位移(第10題)。靜摩擦力，不一定不作功，以圖5為例，因腳與滑車在受到摩擦力作用時，受力點皆有移動($S_{\text{力}} \neq 0$)，因此靜摩擦力作功不為零，透過靜摩擦力作功，分別改變人與滑車的動能。

最後，綜合以上，發現許多學生對於公式或定理的掌握，經常一知半解，例如：雖能套用 $\text{work} = F \cdot S$ 的作功公式，卻未能掌握其中的F與S的指認對象、時機、甚至觀察座標。同理，許多人雖然存有[作功=能量變化]的粗略印象，但對於“能量變化”，究竟包含哪些能量種類，卻未能掌握。更細的部分，包含正向力是否作功？靜摩擦是否作功？都不是背誦套招，能夠確實回答的，唯有先根據**定義與定理**，透過試題已知條件，再進行**概念推理**，才能得到正確的解答。

註1. 所有的黑體英文字母，代表向量，包含大小與方向。

註2. Arons, A. B. (1999) Development of energy concepts in introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 67, 1063–1067.