

觀念物理一解答

跑步機上的「功與能」

詳解與困難剖析

針對本單元試題的正確答案、常見錯誤選項、及試題難度，列於表 1，並說明如下。

表 1：各題之正確答案、常見錯誤、及題目難度

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
正確答案	B	A	A	B	C	C	C	C	B
常見誤答	C	B	B	C	無	A	B	無	C
難度	中	難	中	中	中	難	難	易	難

第 1 ~ 3 題

正確觀念：要比較此人在跑步機上的重力與正向力之大小，需先畫力圖（如圖 1），此人所受的力圖，根據作用來源，包含重力（↓）、正向力（↖）、及摩擦力。因人的腳往斜後方卡住輸送帶，所以，輸送帶對腳的摩擦力，方向為斜前方（↗）（第 3 題）。

接著，因此人對輸送帶維持**等速度**向前，對地面則維持靜止，無論靜止或等速度運動，皆是「慣性運動」，所以合力 = 0。透過**分量抗衡**可得：正向力 $N = F_{g\perp} = mg \cdot \cos\theta$ （↖ = ↘），而摩擦力 $F_f = F_{g\parallel} = mg \cdot \sin\theta$ （↗ = ↙）（如圖 2）。因此 $mg > N$ （第 1 題），而摩擦力則會隨傾斜角 θ 的增加而增加（第 2 題）。此時，因為腳與輸送帶之間並沒有相互滑動，所受的摩擦屬於靜摩擦，而摩擦力大小是由重力的平行分量來決定，才能維持等速度，故此時之靜摩擦力與靜摩擦係數無關。

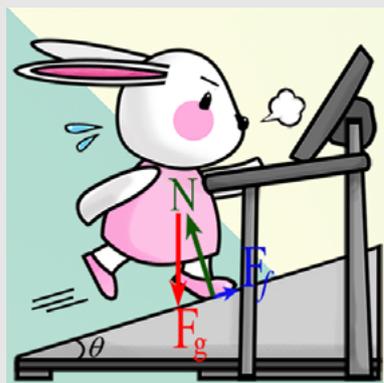


圖 1：人所受的力圖

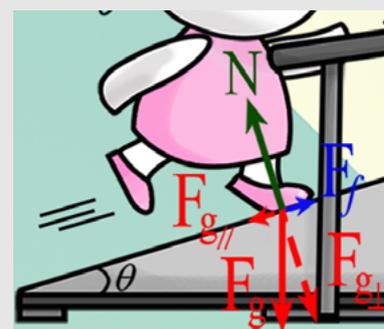


圖 2：力平衡分析

常見錯誤：許多同學在判斷受力大小與方向時，出現以下的錯誤：

1. 以為摩擦力的方向必然與人前進的方向相反（↙），事實上，小美需藉由腳上所受的摩擦力（↗），才能前進（以輸送帶為觀察點）。所以，此處的摩擦力是幫助運動，而不是阻止運動（第 3 題）。

2. 多數學生雖然能掌握此人所受的是靜摩擦，但卻誤用 $F_f = \mu_s \cdot N$ 公式，沒能分辨此公式為「**最大靜摩擦**」，而不是靜摩擦。靜摩擦的大小是沒有公式可以套的，必須透過「力平衡」(合力 = 0) 來反推(第 2 題)。
3. 判斷正向力大小時(第 1 題)，可能誤用正向力與重力間，上、下的分量抗衡($\uparrow = \downarrow$)，而誤選了 $F_g < N$ 、沒有考慮到摩擦力也有向上分量。另外，也有人直接套用 $N = mg$ 的純量關係，忽略了兩個力並非平行，故需要進行向量分解。

第 4 ~ 6 題

正確觀念：對於非質點系統而言，無論是剛體 (rigid bodies)，或是會變形物體 (deformable bodies，如：彈簧系統，或人體)，外力對系統「作功」的定義 ($W = FS$)，其中的 S ，指的是**受力位置**的位移 (而不是質心位移)，且**平行**於外力 F 的分量^[2]。以**輸送帶為觀察點**，重力 ($F_g: \downarrow$)，且其施力點 (重心) 會往前 ($S: \nearrow$) 移動，兩者夾角 $>90^\circ$ ，故重力對小美作負功 (第 4 題)。

至於正向力與摩擦力對小美作功，皆須根據腳 (施力點) 的位移而定，因為腳是隨著輸送帶一起向後，因此，站在輸送帶來觀察，腳維持靜止 (位移 $S = 0$)。因此正向力不作功 (第 5 題)，摩擦力也不作功 (第 6 題) ($W = FS = 0$)。

綜合第 4~6 題，以輸送帶為觀察點時，因重力作負功，所以小美需消耗身體的內能 (肌肉需進行「電化機制」，electrochemical process)^[2]，彌補重力所做的負功，以維持等速步行 (總動能不變)。

常見錯誤：許多同學對於「作功」的定義 ($W = FS$)，雖然能掌握 S 是**平行**於外力的位移，但卻常誤以為是**質心位移**，(而不是**施力點位移**)。這項誤解顯示在以下作答中：

1. 雖然多數學生能正確選答「正向力不作功」，但所提出的理由卻是「位移與正向力互相垂直」，顯示出他們是從輸送帶看**質心位移** (\nearrow)，而非腳 (施力點) 對輸送帶的位移 (第 5 題)
2. 也有許多同學回答「摩擦力作正功，因為位移 (\nearrow) 與摩擦力 (\nearrow) 同向」(第 6 題)，也透露出他們判斷作功時，依然誤用了質心位移。

至於重力作功的誤判，則有同學解釋，「因為人沒有上下移動，所以重力不作功」(第4題)，顯示出他們未能掌握觀察點是在輸送帶的條件，而不是靜止的地面。綜合學生對第4~6題的作答發現，許多學生會切換不同的觀察點，來判斷不同外力作功的結果，違反試題所給定的已知條件。

綜合第4~6題，以**輸送帶為觀察點**，當學生誤以**質心位移**來分析「作功」，則會得到：正向力不作功、重力作負功、摩擦力作正功。其中，摩擦力的正功($W_{F_f} = F_f \cdot S = +mg \sin\theta \cdot S$)與重力的負功($W_{F_g} = -mgh = -mgS \cdot \sin\theta$)大小相等，使得所有外力作功的總和等於零，無法解釋輸送帶越陡，走起來越吃力的現象。

第7~9題

正確觀念：接著，以**地面為觀察點**，來判斷小美所受重力的作功。因為行走過程中，重心對靜止地面而言，一直維持在原來位置(沒有位移)，故重力不作功(第7題)。而正向力與摩擦力對小美作功，則因其施力點(腳)，會往斜下移動($S:\swarrow$)，可推得正向力($N:\nearrow$)與腳的位移($S:\swarrow$)互相垂直，故正向力不作功(第8題)(如圖3)。而摩擦力($F_f:\nearrow$)則與腳的位移($S:\swarrow$)反向，因此摩擦力對此人作負功(第9題)。

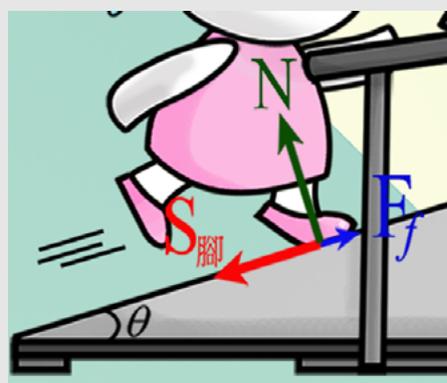


圖3：施力位移與施力

最後，回到一開始的問題：在地面觀察時，輸送帶的傾斜角越大，為何在上面維持等速步行時會越吃力？等速步行時，重力雖然不作功(重力位能不變)，但過程中靜摩擦力會對人作負功(第9題)，所以為了維持動能不變，需要消耗此人的內能(肌肉上的生化能)，來彌補摩擦力所作的負功。因為傾斜角越大，靜摩擦越大(第2題)，所以輸送帶越陡，越耗體力。

另一個解釋，則可透過「作用力與反作用力定律」，小美為了維持等速運動，腳需受到摩擦力($F_{f \text{ 輸送帶} \rightarrow \text{腳}}:\nearrow$)，才能達到力平衡(合力=0)。因此，腳對輸送帶則會有反作用力($F_{f \text{ 輸送帶} \rightarrow \text{腳}}:\swarrow$)，又因腳的位移方向($S:\swarrow$)，與腳對輸送帶的摩擦同向，所以腳對輸送帶作正功，因而消耗此人體力^[1]。

常見錯誤：多數同學能正確掌握「正向力不作功，因為(腳的)位移與正向力相垂直」的概念推理(第8題)。但是，約有一半的學生誤選了重力會作負功，並解釋說「因為人一直在往上走」，透露出他們對於**觀察點**的混淆：對地面而言，此人並沒有向上移動(第7題)。

難度最高的題目是，在地面觀察，來判斷摩擦力對此人的作功 (第9題)，其盲點包含：

1. 雖能正確掌握觀察點 (地面)，但引用 $W = FS$ 時，誤用了質心位移 (S)，則會選擇摩擦力不作功。
2. 也有許多人回答「摩擦作正功，因為人向前進，位移與摩擦力同向」，此時，可能同時犯了兩項錯誤：不但誤以質心位移來判斷作功，也誤將輸送帶當成觀察點。

綜合第7~9題，以地面為觀察點，如果以「質心位移」來探討外力作功，則因為質心位移 = 0，導致重力、摩擦力、及正向力，三個外力皆不作功的結論。無法解釋在斜坡上步行會消耗體力的現象，顯露出以「質心位移」來探討「作功」的不當之處。

不當推理及有效策略

綜合上述，有關「跑步機的功與能」，可歸納出下列幾點概念要點，及常見盲點：

首先，多數學生雖然已熟記「作功」的公式 ($W = FS$)，也能掌握 S 是「平行位移」。但是，位移 (S) 所指的，究竟是「質心位移」或是「施力點位移」，則感到相當困惑。兩種位移，對於非質點系統而言就有差異，需加以釐清，以「施力點位移」來分析「作功」，才能順利解釋系統的能量變化。

其次，**觀察點會影響「作功」**：不同的**觀察點**，推得的作功就不相同。但是，本單元測試結果發現，許多學生經常忽視試題所給定的觀察點位置，而是根據自己的「習慣」，隨意地移動觀察點，例如：判斷正向力作功時，傾向以**地面**為觀察點 (第5題)。而判斷摩擦力作功時，則常以接觸面 (**輸送帶**) 為觀察點來作答 (第9題)，漠視試題對於觀察點的規範。

最後，關於正向力 (N) 及靜摩擦力 (F_f) 大小的推導，這兩個力，都沒有適合的公式可以直接套用，而是需透過運動狀態 (加速度)，來反推它們的數值。以本單元為例， $\because a = 0 \therefore$ 合力 = 0，正向力 (第1題) 及摩擦力 (第2題) 都是透過「力平衡」推導而得。但測試結果卻發現有不少學生，濫用了 $N = mg$ ，或 $F_{f\max} = \mu_s \cdot N$ ，這兩個式子，只有在特定條件下才能適用，所以並非通式，稱不上是「公式」。

註：

1. Nave, C., & Amoreira, L. J. (2014). Why is it harder to run on an inclined exercise treadmill? *The Physics Teacher*, **52**, 241-242.
2. Arons, A. B. (1999) Development of energy concepts in introductory physics courses. *American Journal of Physics*, **67**, 1063-1067.